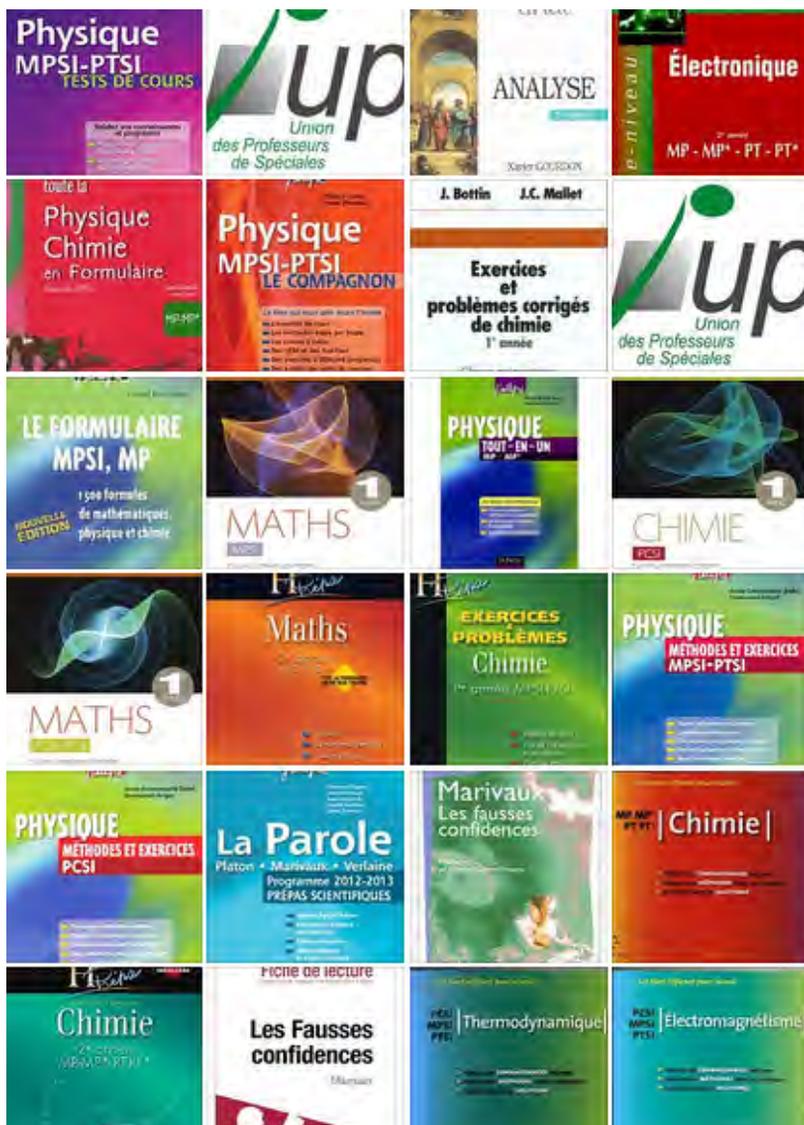


BIBLIOTHEQUE ELECTRONIQUE DES CLASSES PREPA

partager le savoir gratuitement



pour plus de livres gratuit et exclusive visiter nous sur :

page facebook :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>

ou sur le forum :

<http://prepa-book.forummaroc.net/>

* © bibliothèque électronique des classes prepa™ *

f'intègre

**Jean-Dominique Mosser
Jacques Tanoh
Jean-Jacques Marchandea**

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

MÉTHODES ET EXERCICES

1^{re} ET 2^e ANNÉES

DUNOD

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-058455-0

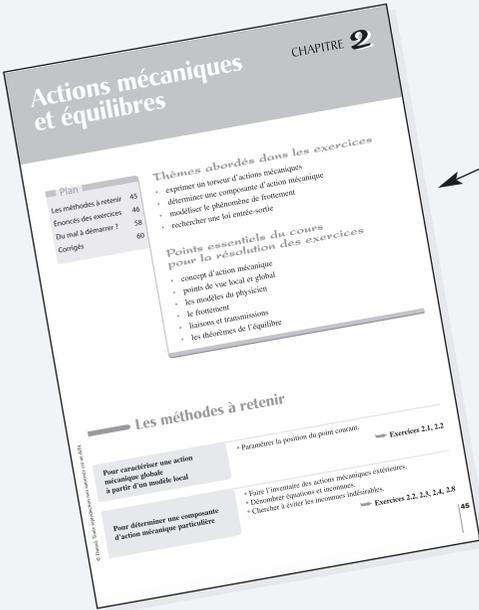
Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1. Cinématique des systèmes de solides	1	Du mal à démarrer ?	120
Les méthodes à retenir	1	Corrigés des exercices	121
Énoncés des exercices	3		
Du mal à démarrer ?	20		
Corrigés des exercices	21		
2. Actions mécaniques et équilibres	45	5. Automatique des systèmes continus	139
Les méthodes à retenir	45	Les méthodes à retenir	140
Énoncés des exercices	46	Énoncés des exercices	141
Du mal à démarrer ?	59	Du mal à démarrer ?	162
Corrigés des exercices	60	Corrigés des exercices	163
3. Mécanismes	79	6. Performances des systèmes asservis	203
Les méthodes à retenir	80	Les méthodes à retenir	203
Énoncés des exercices	80	Énoncés des exercices	205
Du mal à démarrer ?	91	Du mal à démarrer ?	228
Corrigés des exercices	92	Corrigés des exercices	230
4. Dynamique	109	7. Automatique des systèmes discrets	273
Les méthodes à retenir	109	Les méthodes à retenir	273
Énoncés des exercices	110	Énoncés des exercices	274
		Du mal à démarrer ?	279
		Corrigés des exercices	280

Pour bien utiliser cet ouvrage



La page d'entrée de chapitre

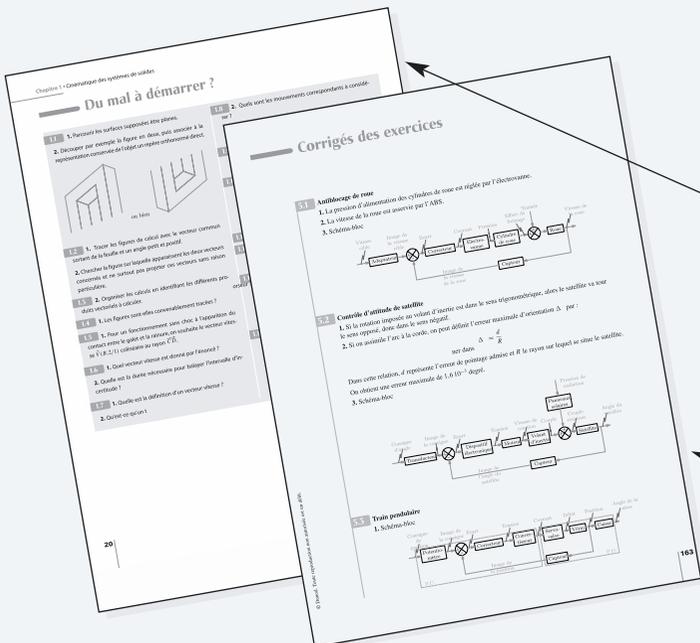
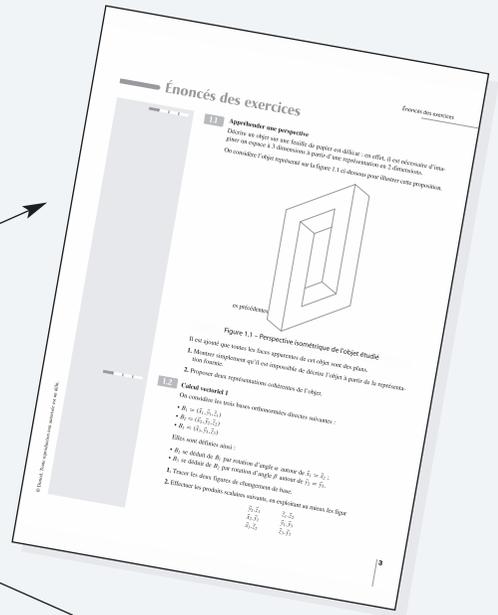
Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Plan

Les méthodes à retenir	1
Énoncés des exercices	3
Du mal à démarrer ?	20
Corrigés	21

Thèmes abordés dans les exercices

- se repérer dans l'espace
- acquérir les techniques de calcul vectoriel
- déterminer la nature d'un mouvement
- déterminer un vecteur vitesse, un vecteur accélération
- composer des mouvements
- déterminer les lois entrée-sorties pour des mécanismes simples
- évaluer des performances cinématiques et géométriques

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- notion de solide indéformable, de repère orthonormé direct
- notion de mouvement
- translation, rotation, roulement sans glissement
- notion de liaison
- figures de calcul
- produits scalaires, produits vectoriels et produits mixtes
- dérivation vectorielle
- composition des mouvements
- champ de vecteurs équiprojectifs et relation de changement de point

Les méthodes à retenir

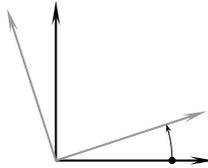
Pour tracer ou interpréter une perspective

- S'appuyer sur les projections d'un repère orthonormé direct.

➔ Exercice 1.1

Pour calculer produits scalaires et produits vectoriels

- Utiliser les figures de calcul :
 - tracées avec le vecteur normal sortant de la feuille ;
 - tracées avec un angle petit et positif



➔ Exercices 1.2, 1.3, 1.4

Pour tracer des lois horaires

- Mettre en œuvre les relations de dérivation entre position et vitesse.

➔ Exercice 1.5

Pour associer dérivation vectorielle et relation de changement de point

- Utiliser un paramétrage cohérent avec le mouvement considéré.

➔ Exercice 1.7

Pour tracer un champ de vecteurs vitesse

- Utiliser l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse.
- Identifier le centre instantané de rotation.

➔ Exercice 1.6

Pour identifier et tracer des trajectoires

- Chercher les caractéristiques du mouvement concerné.

➔ Exercice 1.8

Pour identifier un mouvement de translation

- Montrer que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(i/k)$ du mouvement i/k concerné est à chaque instant le vecteur nul.

➔ Exercice 1.9

Pour exprimer le roulement sans glissement

- Identifier le point concerné, ainsi que le mouvement à considérer.

➔ Exercices 1.10, 1.11, 1.12, 1.13

Pour déterminer une loi entrée-sortie

- Dénombrer les inconnues et chercher à éviter celles qui sont indésirables.

➔ Exercices 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14

Pour déterminer des lois de commande

- Mettre en relation les approches fonctionnelles et structurelles.

➔ Exercice 1.15

Pour aborder la cinématique d'un mécanisme complexe

- Mettre en œuvre l'ensemble des compétences acquises.

➔ Exercice 1.16

Énoncés des exercices

1.1 Appréhender une perspective

Décrire un objet sur une feuille de papier est délicat : en effet, il est nécessaire d'imaginer un espace à 3 dimensions à partir d'une représentation en 2 dimensions.

On considère l'objet représenté sur la figure 1.1 ci-dessous pour illustrer cette proposition.

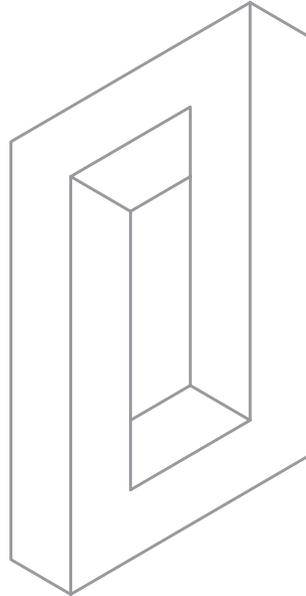


Figure 1.1 – Perspective isométrique de l'objet étudié

Il est ajouté que toutes les faces apparentes de cet objet sont des plans.

1. Montrer simplement qu'il est impossible de décrire l'objet à partir de la représentation fournie.
2. Proposer deux représentations cohérentes de l'objet.

1.2 Calcul vectoriel 1

On considère les trois bases orthonormées directes suivantes :

- $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Elles sont définies ainsi :

- B_2 se déduit de B_1 par rotation d'angle α autour de $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$;
- B_3 se déduit de B_2 par rotation d'angle β autour de $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$.

1. Tracer les deux figures de changement de base.
2. Effectuer les produits scalaires suivants, en exploitant au mieux les figures précédentes

$$\begin{array}{ll} \vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 & \vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 \end{array}$$

3. Calculer de même les produits vectoriels proposés ci-dessous

$$\begin{array}{ll} \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1 & \vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 \end{array}$$

1.3 Calcul vectoriel 2

On considère quatre bases orthonormées directes :

$$\begin{array}{ll} B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) & B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \\ B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \end{array}$$

Elles sont définies ainsi :

- B_2 se déduit de B_1 par rotation d'angle ψ autour de $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$;
- B se déduit de B_2 par rotation d'angle θ autour de $\vec{x}_2 = \vec{u}$;
- B_3 se déduit de B par rotation d'angle φ autour de $\vec{w} = \vec{z}_3$.

1. Réaliser les différentes figures de changement de base.

On donne un vecteur $\vec{\Omega} = p\vec{z}_1 + q\vec{x}_2 + r\vec{z}_3$ et un vecteur $\vec{U} = b\vec{z}_3$

2. Calculer le produit vectoriel $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$.

1.4 Calcul vectoriel 3

On considère les trois bases orthonormées directes suivantes :

- $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Elles sont déduites les unes par rapport aux autres par les deux rotations décrites sur les figures ci-dessous

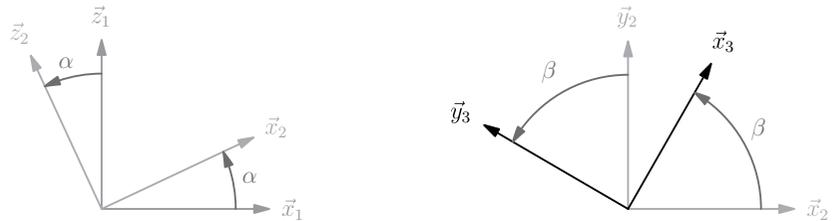


Figure 1.2 – Les figures de calcul proposées

1. Commenter les deux figures de changement de base fournies.

2. Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 & \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 & \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 & \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3 & \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3 \end{array}$$

1.5 Croix de Malte

Un mécanisme à croix de Malte est composé :

- d'une partie menante : roue ou manivelle sur laquelle sont montés un ou plusieurs galets ;
- d'une partie menée : croix de Malte comportant des rainures radiales régulièrement réparties.

Au cours de la rotation de la roue menante, chaque galet s'engage dans une rainure, entraînant la croix en rotation, puis se dégage. À chaque passage, la croix de Malte tourne donc d'un angle donné.

Soit un mécanisme à un galet et trois rainures ébauché sur la figure ci-dessous :

- le bâti est repéré 1 et on suppose l'entraxe $AC = e$ fixé ;
- la roue menante, repérée 2, est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1, et porte un galet de diamètre d ;
- la croix de Malte, repérée 3, est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti 1.

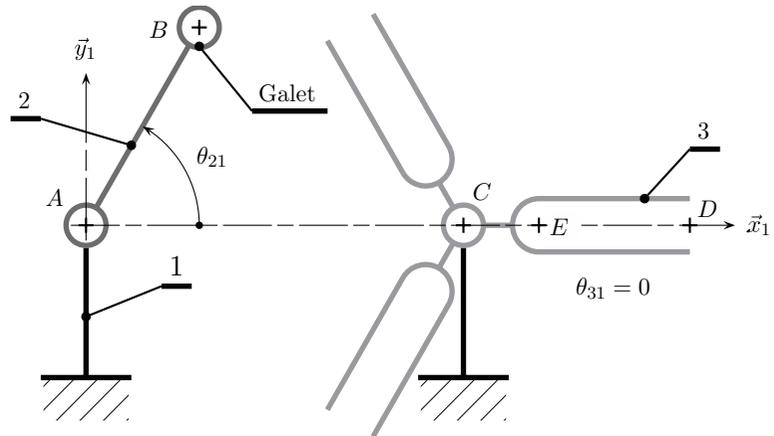


Figure 1.3 – Schéma de principe d'une croix de Malte

On désire un fonctionnement sans choc, c'est-à-dire que le galet s'engage suivant l'axe de la rainure.

1. Déterminer par la méthode de votre choix et en fonction de l'entraxe e les valeurs des trois paramètres géométriques suivants pour que le fonctionnement souhaité soit possible :

- la longueur $AB = L$;
- la longueur $CD = R$;
- la profondeur des rainures $ED = h$.

Soient θ_{21} la position angulaire et ω_{21} la fréquence de rotation supposée uniforme de la roue menante par rapport au bâti.

2. Sans calcul préliminaire particulier et pour deux tours de la roue menante 2, donner l'allure des courbes θ_{31} et ω_{31} en fonction de θ_{21} , et matérialiser sur ces courbes les points remarquables.

1.6 Robot piqueur

Soit un robot piqueur à structure parallèle tel que présenté sur la figure 1.4 ci-dessous. Il comprend un bâti repéré 0, un porte-préhenseur repéré 3 et trois sous-structures identiques a , b et c , composées chacune de :

- un bras repéré 1_i en mouvement de rotation d'axe à nommer (O_i, \vec{z}_i) par rapport au bâti ;
- deux tiges identiques 2_i et 4_i , avec
 - la tige 2_i en liaison sphérique de centre à repérer A_i avec le bras et en liaison sphérique de centre à repérer B_i avec le porte-préhenseur,
 - la tige 4_i en liaison sphérique de centre à repérer C_i avec le bras et en liaison sphérique de centre à repérer D_i avec le porte-préhenseur.

Cette architecture permet au préhenseur de se déplacer en translation spatiale par rapport au bâti lorsque sont pilotées les trois rotations par rapport au bâti des arbres 1_a , 1_b et 1_c .

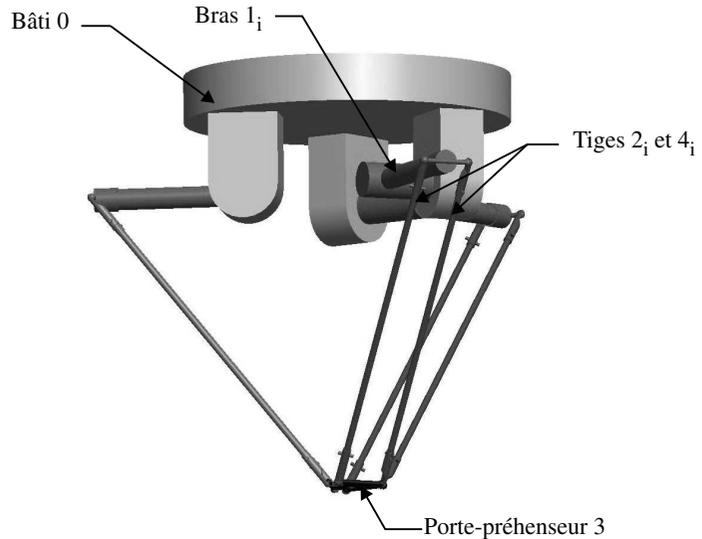


Figure 1.4 – Architecture du robot piqueur

On s'intéresse à quelques performances en vitesse et en précision.

Lorsque le robot est dans une position symétrique des trois bras et que ces trois bras ont à chaque instant la même position angulaire par rapport au bâti, le mouvement du porte-préhenseur par rapport au bâti est une translation verticale. On peut restreindre dans ce cas l'étude au mécanisme à mouvements plans décrit sur la figure 1.5 et constitué de :

- un bâti 0 ;
- un bras repéré 1 en rotation d'axe (O, \vec{z}) par rapport au bâti, générée par un moteur ;
- une tige 2 en mouvement de rotation d'axe (A, \vec{z}) par rapport au bras 1 ;
- un porte-préhenseur 3 en mouvement de translation verticale par rapport au bâti 0 et en mouvement de rotation d'axe (B, \vec{z}) par rapport à la tige 1.

Le mécanisme est représenté en position de référence. Pour les besoins d'échelle des longueurs, on note qu'une tige est caractérisée par $AB = 800$ mm. Dans cette position, les performances annoncées sont une vitesse verticale du porte-préhenseur de $+1$ m/s et une précision de $\pm 0,1$ mm selon la verticale.

1. Déterminer la vitesse de rotation ω_{10} du bras par rapport au bâti.
2. En déduire la précision angulaire de positionnement du bras qui permette d'obtenir le bon positionnement du porte-préhenseur.

Pour représenter les vecteurs vitesse, prendre $1 \text{ m/s} \longleftrightarrow 50 \text{ mm}$

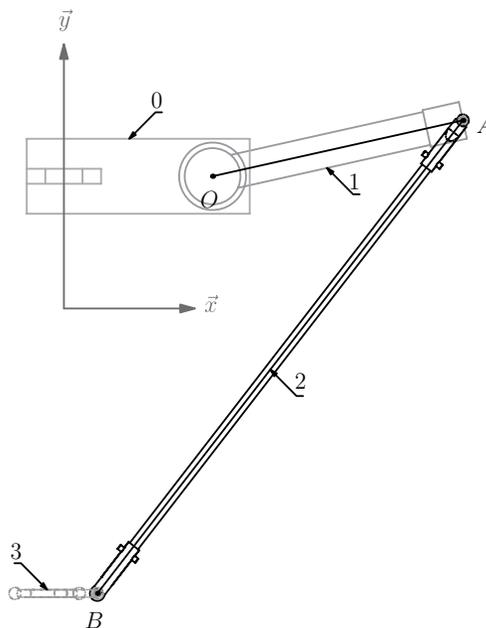
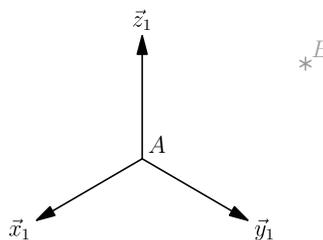


Figure 1.5 – Figure pour les constructions graphiques

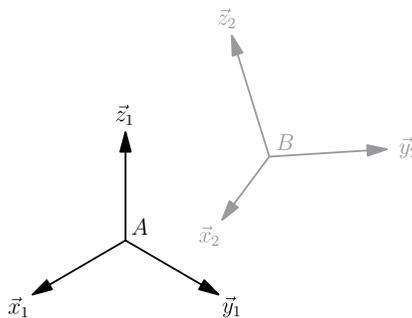
1.7 Mouvement d'un point

Un point B peut être considéré de deux manières différentes :

- soit un point géométrique en mouvement par rapport à un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;



- soit un point fixe dans un solide S en mouvement par rapport à un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:
 - on associe alors au solide S un repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$,



- on pose le torseur cinématique associé au mouvement 2/1 considéré.

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(C, 2/1) \end{cases}$$

1. Exprimer dans le premier cas le vecteur vitesse du point B géométrique $\vec{V}(B/1)$.
2. Exprimer dans le second cas le vecteur vitesse $\vec{V}(B,2/1)$.
3. À quelle(s) condition(s) les deux propositions précédentes sont-elles équivalentes ?

1.8 Mécanisme à excentrique

On considère le mécanisme à excentrique schématisé ci-dessous, que l'on étudie en mouvement plan. Il comprend trois solides :

- un bâti 1, auquel est associé un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un excentrique 2, en liaison pivot d'axe la droite (A, \vec{z}_1) avec le bâti. On lui associe une base $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$, puis on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $\vec{AC} = e \vec{x}_2$. Cet excentrique comporte dans le plan $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ un cercle de centre C et de rayon R ;
- un piston 3, en liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bâti 1. La rotation possible n'est pas exploitée dans cet exercice et on lui associe alors une base 3 confondue avec la base 1.

Ce piston comporte une droite (B, \vec{x}_3) en contact avec l'excentrique en un point I .

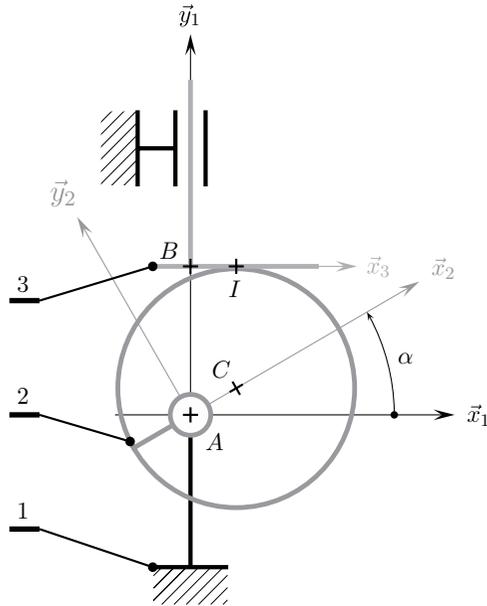


Figure 1.6 – Schéma cinématique du mécanisme à excentrique

1. Tracer le graphe de structure, et dénombrer les mouvements de solides possibles.
 2. Caractériser graphiquement les vecteurs vitesse $\vec{V}(I,3/1)$, $\vec{V}(I,2/1)$ et $\vec{V}(I,2/3)$.
 3. Préciser les trajectoires des points I dans chacun des mouvements énoncés, à savoir $3/1$, $2/1$ et $2/3$.
- On s'intéresse maintenant au point géométrique I qui suit le contact au cours du temps.
4. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(I/1)$.

1.9 The Falkirk Wheel

L'élévateur de Falkirk, en Écosse, permet de faire passer les bateaux d'un plan d'eau de niveau N_I à un canal de niveau N_S à l'aide d'un bras animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal selon le schéma de principe donné ci-dessous.

Le dénivelé est de 25 mètres et le mécanisme comprend :

- un bâti 1 auquel est associé le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$; il comporte une roue dentée de Z_1 dents ;
- un bras motorisé 2 en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti 1 ; on lui associe le repère $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, avec $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$, et on pose :
 - l'angle $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$,
 - les longueurs $\vec{CA} = a \vec{x}_2$ et $\vec{CB} = b \vec{x}_2$;
- deux pignons identiques 3 et 5 de $Z_3 = Z_5$ dents, en liaisons pivot respectivement d'axe (A, \vec{z}_2) et d'axe (D, \vec{z}_2) avec le bras 2 ;
- deux roues identiques 4 et 6 de $Z_4 = Z_6$ dents, en liaisons pivot respectivement d'axe (B, \vec{z}_2) et d'axe (E, \vec{z}_2) avec le bras 2 ;
- deux bacs b_4 et b_6 à considérer encastrés respectivement sur les roues 4 et 6.

D'un point de vue géométrique, les roues 6 et 5 sont respectivement les symétriques des roues 4 et 3 par rapport à l'axe (C, \vec{y}_2) .

D'un point de vue cinématique, la principale caractéristique est l'égalité des nombres de dents Z_1 du bâti et des roues extérieures Z_4 et Z_6 .

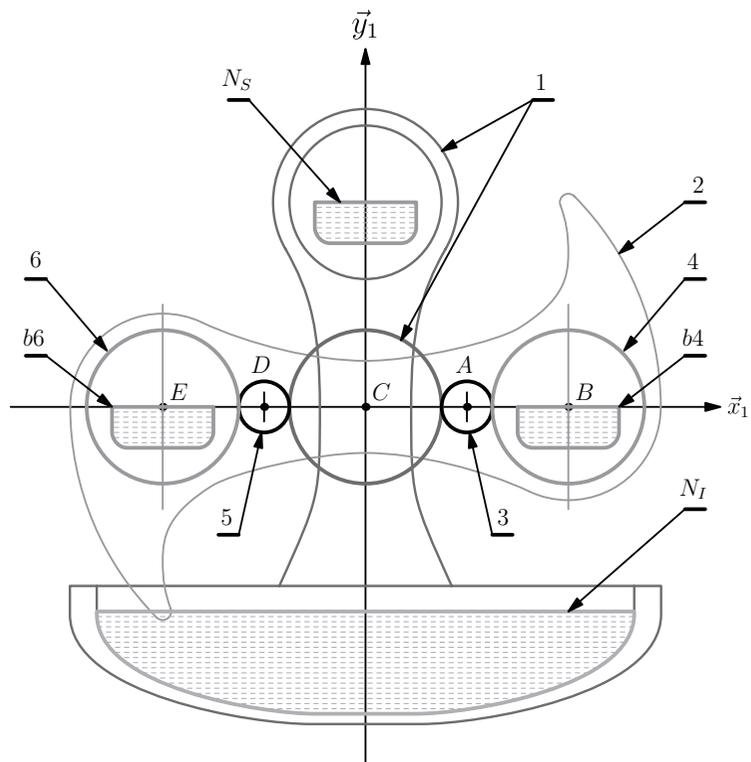


Figure 1.7 – Schéma de principe de l'élévateur

1. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
2. Montrer que les bacs b_4 et b_6 sont bien en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1.

1.10 Engrenage

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme engrenage à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle deux cercles respectivement de rayon R_2 et R_3 et de centres A et B sont tangents au point I .

On suppose que le contact en I est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

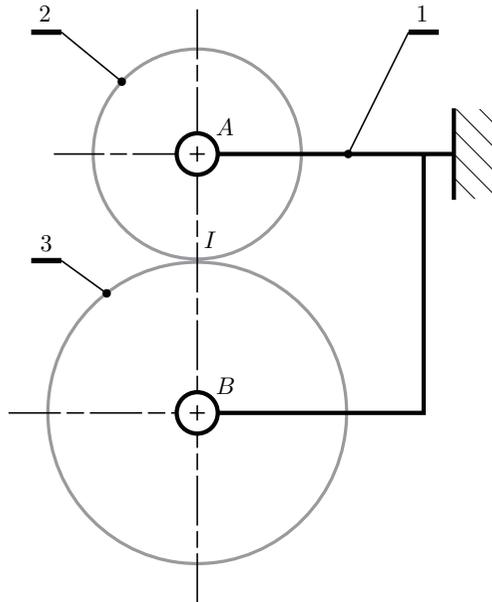


Figure 1.8 – Épure plane d'un mécanisme engrenage

1. Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
2. Tracer le graphe de liaison.
3. Exprimer le non-glissement au point I .
4. Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des deux liaisons pivot.

1.11 Pignon-crémaillère

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme pignon-crémaillère à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle un cercle de centre A et de rayon R_2 est tangent à une droite au point I .

On suppose que le contact en I est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

1. Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
2. Tracer le graphe de liaison.
3. Exprimer le non-glissement au point I .
4. Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des liaisons pivot et glissière.

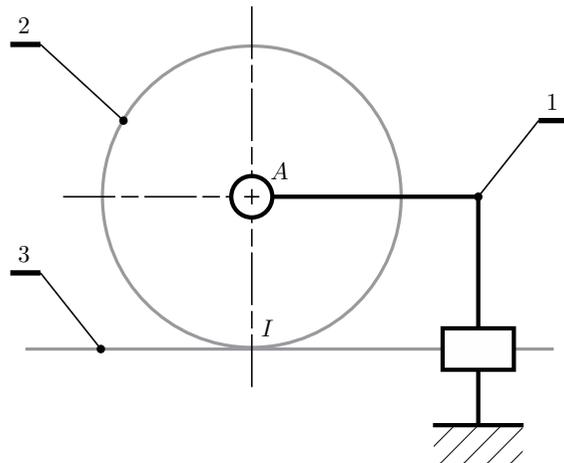


Figure 1.9 – Épure d'un mécanisme pignon-crémaillère

1.12 Différentiel linéaire

On considère le mécanisme à cinq solides schématisé ci-dessous. Il comprend :

- un bâti 1, auquel est associée une base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un arbre 2, en liaison glissière de direction \vec{x}_1 avec le bâti. La base 2 est choisie confondue avec la base 1 ;
- un pignon 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec l'arbre 2. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$ et on note α l'angle (\vec{x}_2, \vec{x}_3) ;
- deux crémaillères repérées 4 et 5, en liaisons glissière de direction \vec{x}_1 avec le bâti 1. Elles engrenent sur le pignon 3 respectivement en I et en K.

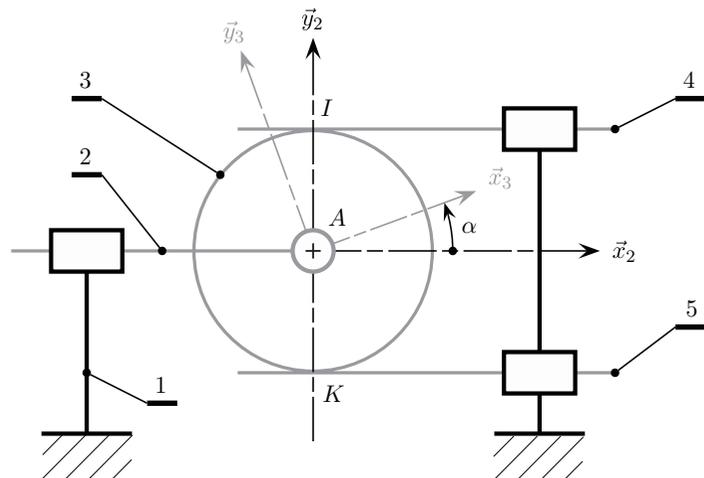


Figure 1.10 – Schéma cinématique d'un différentiel linéaire

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Soient respectivement V_{41} , V_{51} et V_{21} les vitesses scalaires des solides 4, 5 et 2 par rapport au bâti 1. Caractériser les torseurs cinématiques des liaisons.
3. Déterminer l'équation reliant les trois paramètres scalaires précédents.

4. À partir de cette équation, imaginer et retrouver les mouvements possibles dans les deux cas particuliers suivants :

- on bloque l'arbre 2 par rapport au bâti 1 ;
- on bloque la rotation du pignon 3 par rapport à l'arbre 2.

1.13 Train épicycloïdal

On considère le mécanisme à cinq solides schématisé sur les figures 1.11 et 1.12. Il s'agit d'un train épicycloïdal dit de « type 1 ». Il comprend :

- un bâti 0, auquel est associé le repère $R_0(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- un pignon planétaire 1, de rayon r_1 , en liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_0) avec le bâti 0 :
 - on lui associe le repère $(C, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$,
 - on pose $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- un bras porte-satellite 2, en liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_0) avec le bâti 0 :
 - on lui associe le repère $R_2(C, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$,
 - on pose $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$;
- une roue à denture intérieure 3, de rayon r_3 , en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0) avec le bras 2 :
 - on lui associe le repère $R_3(A, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$,
 - on pose $\gamma = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$;
- un pignon satellite 4, de rayon r_4 , en liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_0) avec le bâti 0.
 - on lui associe le repère $R_4(C, \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$,
 - on pose $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$.

Ce pignon 4 est en contact avec les pignons 1 et 3 respectivement aux points I et J , où il y a roulement sans glissement.

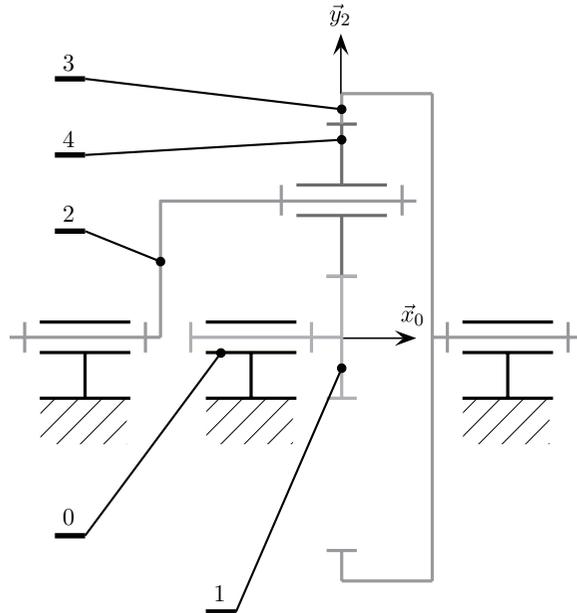
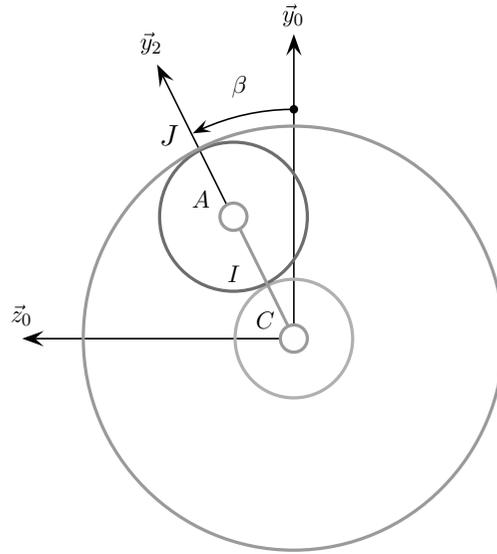


Figure 1.11 – Train épicycloïdal : schéma dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_2)

1. Tracer le graphe associé.

Figure 1.12 – Train épicycloïdal : schéma dans le plan (\vec{y}_0, \vec{z}_0)

2. Écrire les deux fermetures de chaînes cinématiques indépendantes sous forme torso-rielle, puis à l'aide des éléments de réduction des torseurs cinématiques de chaque liaison.
3. Déterminer la relation entre $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\psi}$.

1.14 Pompe à débit variable

Le mécanisme de transformation de mouvement représenté sur la figure 1.13, extrait d'une pompe à débit variable, se compose de 3 pièces :

- un bâti 1 auquel est associé le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$; on pose $\overrightarrow{AH} = d\vec{x}_1$;
- un levier 4, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1 ; on lui associe le repère $(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_1)$ et on pose $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$;
- un piston 3 :
 - en liaison pivot glissant d'axe (H, \vec{y}_1) avec le bâti 1 ; on pose $\overrightarrow{HC} = \lambda\vec{y}_3$,
 - en liaison sphère-plan de centre C et de normale \vec{y}_4 avec le levier 4.

Si nécessaire :

- on repère le point géométrique de contact entre 3 et 4 par le vecteur $\overrightarrow{AB} = -e\vec{y}_4 + \mu\vec{x}_4$;
- on pose $\overrightarrow{CB} = R\vec{y}_4$.

1. Tracer le graphe de liaison du mécanisme.
2. Écrire les différents torseurs cinématiques et représenter la figure de changement de bases pour l'angle δ .
3. Dénombrer les inconnues cinématiques et les équations à disposition.
4. Déterminer la loi cinématique d'entrée-sortie du mécanisme sous la forme

$$\dot{\lambda} = f(\dot{\delta}, \delta, d, e, R)$$

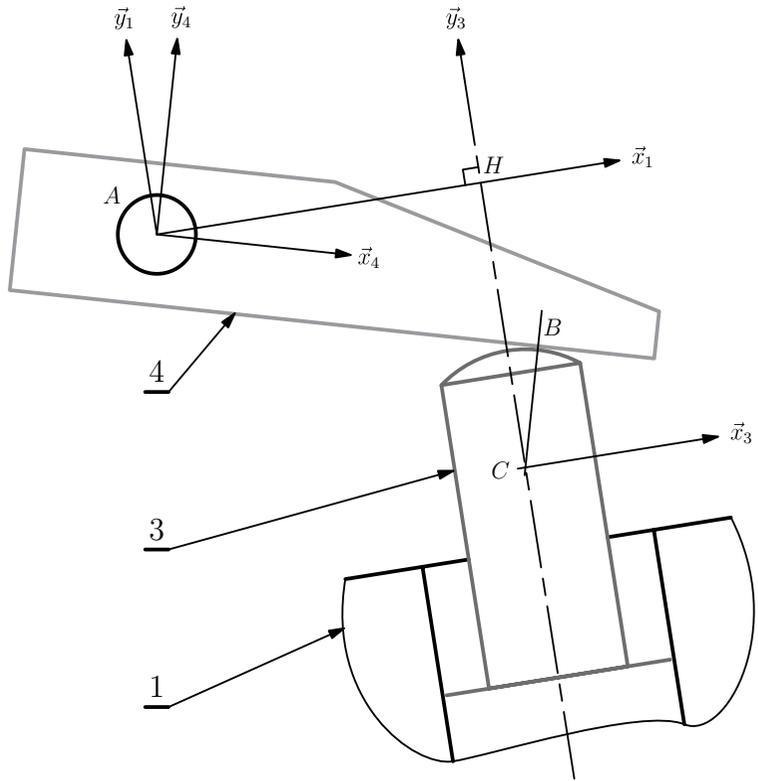


Figure 1.13 – Schéma cinématique de la partie de pompe étudiée

1.15 Robot SCARA

SCARA : Selective Compliant Assembly Robot Arm
ou bien Selective Compliant Articulated Robot Arm

L'étude porte sur un robot de type SCARA, principalement dédié à des tâches d'assemblage, de vissage, de perçage, etc. L'outil utilisé par le robot, que ce soit une pince, une visseuse ou une perceuse par exemple, est lié à l'organe terminal par l'intermédiaire d'une bride.

Le schéma cinématique de la figure 1.14 montre les différents solides constituant le système mécanique articulé, ainsi que les paramètres géométriques propres à chacun des solides et les variables associées aux liaisons.

Ce robot est de type « robot 4 axes » :

- axe 1 : rotation du bras 1 par rapport au bâti 0, d'axe (A, \vec{z}_0) et d'angle θ_1 ;
- axe 2 : rotation de l'avant-bras 2 par rapport au bras 1, d'axe (B, \vec{z}_1) et d'angle θ_2 ;
- axe 3 : rotation du poignet 3 par rapport à l'avant-bras 2, d'axe (C, \vec{z}_2) et d'angle θ_3 ;
- axe 4 : translation de la bride 4 par rapport au poignet 3, de direction \vec{z}_3 et caractérisée par le vecteur $\vec{C}\vec{P} = \rho \vec{z}_3$.

Les constantes géométriques utiles pour cette étude sont résumées ci-dessous :

bâti	$\vec{O}\vec{A} = a\vec{z}_0$	$a = 510$ mm
bras	$\vec{A}\vec{B} = b\vec{x}_1$	$b = 400$ mm
avant-bras	$\vec{B}\vec{C} = c\vec{x}_2$	$c = 250$ mm

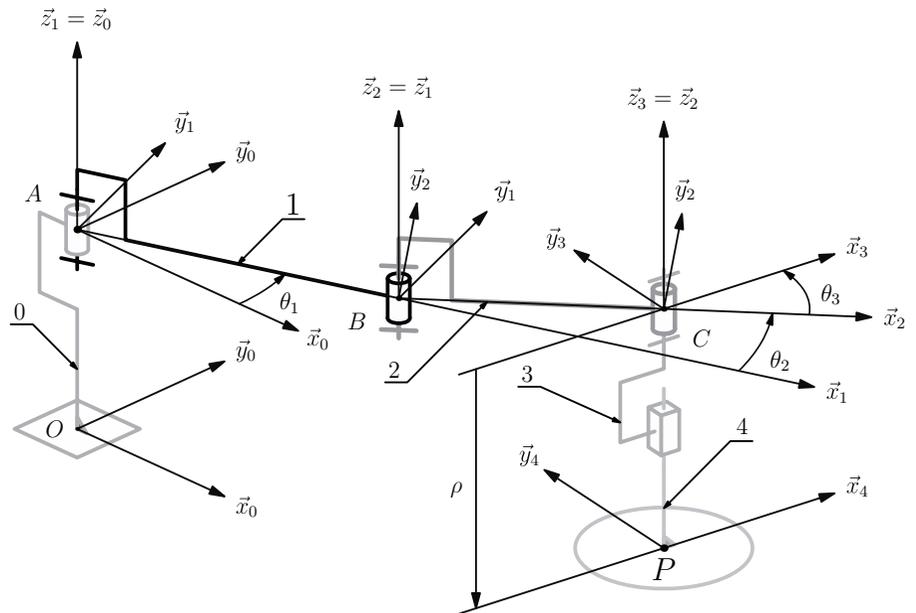


Figure 1.14 – Schéma cinématique du robot SCARA

Approches structurelle et fonctionnelle

Du point de vue structurel, la position de la bride 4 par rapport au bâti 0 est caractérisée par :

- les trois variables articulaires θ_1 , θ_2 et θ_3 ;
- la longueur ρ .

Du point de vue fonctionnel, la position de la bride 4 par rapport au bâti 0 est caractérisée par :

- les trois coordonnées du point P dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;

$$\vec{OP} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$$

- l'angle α orientant la bride dans le plan horizontal.

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_4)$$

1. Exprimer les coordonnées x , y , z et α en fonction des invariants géométriques propres aux solides et des variables associées aux liaisons.

Approche géométrique d'un déplacement

On lie à la bride 4 une pince pneumatique permettant la saisie puis la dépose d'une pièce cylindrique de révolution dont l'axe est parallèle au plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

On étudie une tâche d'assemblage pour laquelle le mouvement de la pièce prise dans la pince du robot doit respecter les contraintes suivantes :

- l'orientation de la pièce dans R_0 est constante, avec comme valeur $\alpha = \frac{\pi}{2}$;
- la trajectoire du point de référence de la pièce P est rectiligne de direction \vec{y}_0 .

Le problème se ramène donc à l'étude de la trajectoire rectiligne du point P entre deux points notés I et F tels que :

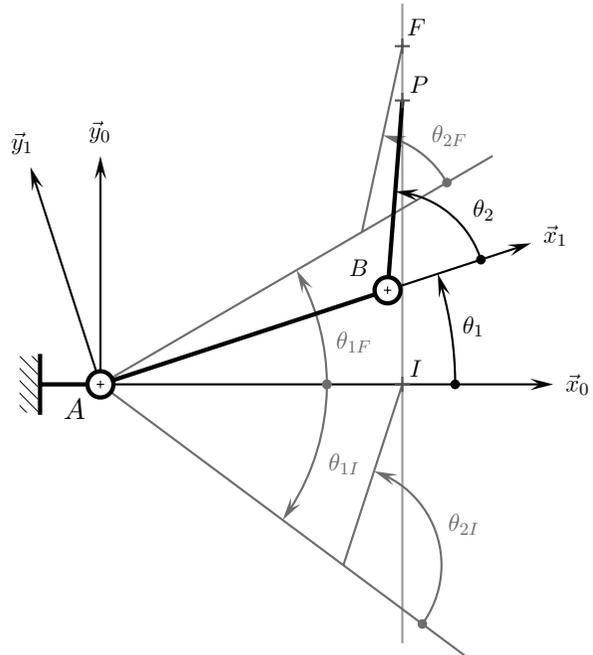


Figure 1.15 – Le mouvement plan étudié

$$\begin{cases} \vec{OI} = x_I \vec{x}_0 + y_I \vec{y}_0 + z_I \vec{z}_0 \\ \vec{OF} = x_F \vec{x}_0 + y_F \vec{y}_0 + z_F \vec{z}_0 \end{cases}$$

On envisage comme valeurs numériques

$$\begin{array}{ll} x_I = 0,4 \text{ m} & x_F = 0,4 \text{ m} \\ y_I = 0,0 \text{ m} & y_F = 0,4 \text{ m} \\ z_I = 0,1 \text{ m} & z_F = 0,1 \text{ m} \end{array}$$

2. À partir de l'épure des positions du bras 1 et de l'avant bras 2 donnée sur la figure 1.15, déterminer les valeurs initiales et finales des angles θ_1 et θ_2 , notées respectivement θ_{1i}, θ_{2i} lorsque le point P est en I et θ_{1f}, θ_{2f} lorsque le point P est en F . Il est à noter que sur le robot, on impose toujours θ_2 positif.

En déduire les valeurs initiale et finale de θ_3 , respectivement notées θ_{3i} et θ_{3f} .

Approche cinématique du déplacement précédent

La vitesse du déplacement précédent, notée $v(t)$, imposée entre les points I et F suit la loi en trapèze de la figure 1.16.

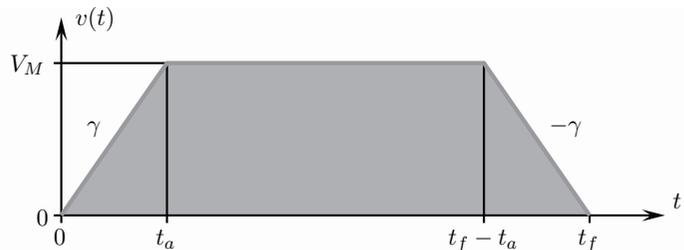


Figure 1.16 – La loi en trapèze de vitesse imposée

3. Exprimer, en fonction des autres paramètres, le temps du déplacement t_f entre les points I et F .
4. Calculer t_f pour $t_a = 0,2$ s et $V_M = 0,4$ ms⁻¹.

On note, pour la position d'un point P quelconque lors du mouvement 4/0 entre I et F

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (b \cos \theta_1 + c \cos (\theta_1 + \theta_2)) \vec{x}_0 \\ &+ (b \sin \theta_1 + c \sin (\theta_1 + \theta_2)) \vec{y}_0 \\ &+ (a + \rho) \vec{z}_0\end{aligned}$$

5. Exprimer le vecteur vitesse du point $\vec{V}(P,4/0)$ en fonction de θ_1 , $\dot{\theta}_1$, θ_2 , $\dot{\theta}_2$, a et b .
6. Retrouver les expressions suivantes de $\dot{\theta}_1$ et de $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ en fonction de v , θ_1 , θ_2 , a et b :

$$\dot{\theta}_1 = \frac{v \sin (\theta_1 + \theta_2)}{a \sin \theta_2} \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = \frac{v \sin \theta_1}{b \sin \theta_2}$$

En déduire les expressions des accélérations angulaires $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$.

7. Application numérique : calculer $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\ddot{\theta}_2$ pour $\theta_1 = \theta_{1i}$, puis pour $\theta_1 = \theta_{1f}$.

On note G_2 le centre de masse de l'avant-bras 2 et on pose $\overrightarrow{BG_2} = a\vec{x}_2 + b\vec{z}_2$

8. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(G_2,2/0)$.

9. Calculer le vecteur accélération $\vec{A}(G_2,2/0)$ pour $\theta_1 = \theta_{1i}$

$$a_2 = 0,134 \text{ m} \quad b_2 = 0,000 \text{ m}$$

1.16 Robot omni-roues

Le chariot étudié, dont une image de l'architecture est donnée sur la figure 1.17, utilise pour ses déplacements sur un plan 1 de normale \vec{z}_1 trois roues motrices à profil sphérique.

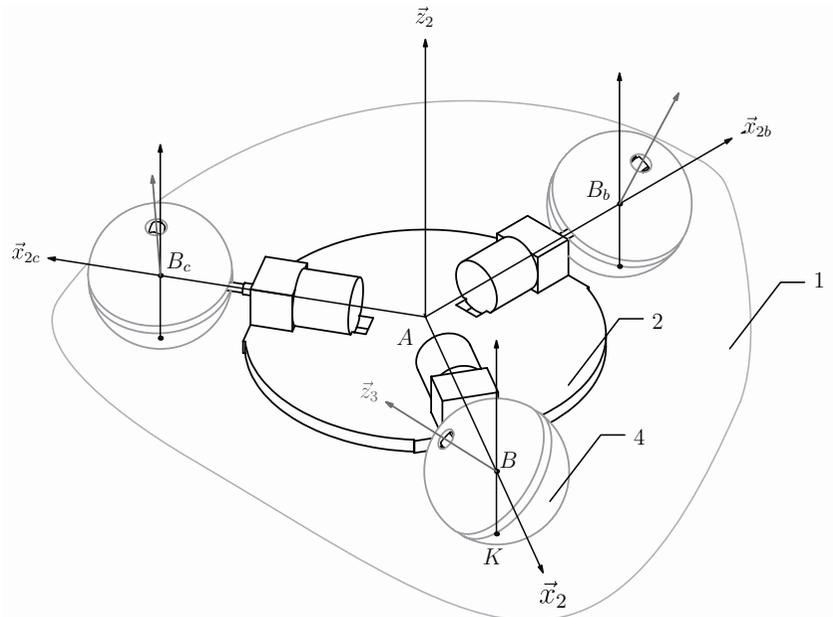


Figure 1.17 – Architecture du robot omni-roues

Il comprend essentiellement pour sa chaîne d'énergie :

- un châssis 2 auquel est associé un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$;
- trois axes motorisés identiques et disposés à 120° , repérés sans indice pour le premier, avec respectivement les indices b et c pour chacun des deux autres.

Le premier des axes motorisés est détaillé sur la figure 1.18. Il comporte un arbre moteur 3 en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_2) avec le châssis 2 ; on lui associe le repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et on pose $\varphi = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$. Cet arbre moteur 3 permet l'entraînement d'un ensemble appelé roue et composé de :

- deux galets principaux et hémisphériques dont l'un est repéré 4, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_3) avec l'arbre 3 ; on pose $\vec{AB} = L\vec{x}_2$ et le rayon de la sphère R ;
- deux galets secondaires dont un est repéré 5, en liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_3) avec l'arbre 3 :
 - on pose $\vec{CB} = a\vec{z}_3$, avec $a > 0$,
 - ce galet de révolution est généré à partir d'un profil circulaire de rayon R ,
 - le centre B du cercle est placé à la distance $R - a$ de l'axe de révolution,
 - l'arc de cercle est limité par les angles $-\varphi_0$ et φ_0 par rapport à BC .

La géométrie identique des trois roues et leur disposition sur le châssis permet de considérer un mouvement plan de ce dernier par rapport au sol, décrit par le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$ tel que

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \omega_{21}\vec{z}_2 \\ \vec{V}(A, 2/1) \perp \vec{z}_2 \end{cases}$$

Cette disposition permet au contact entre une roue et le sol de se faire au point géométrique K tel que $\vec{KB} = R\vec{z}_2$, que ce soit un contact par l'intermédiaire d'un galet principal ou secondaire. Pour simplifier l'étude, on n'étudie pas les situations pour lesquelles deux galets sont simultanément en contact avec le sol.

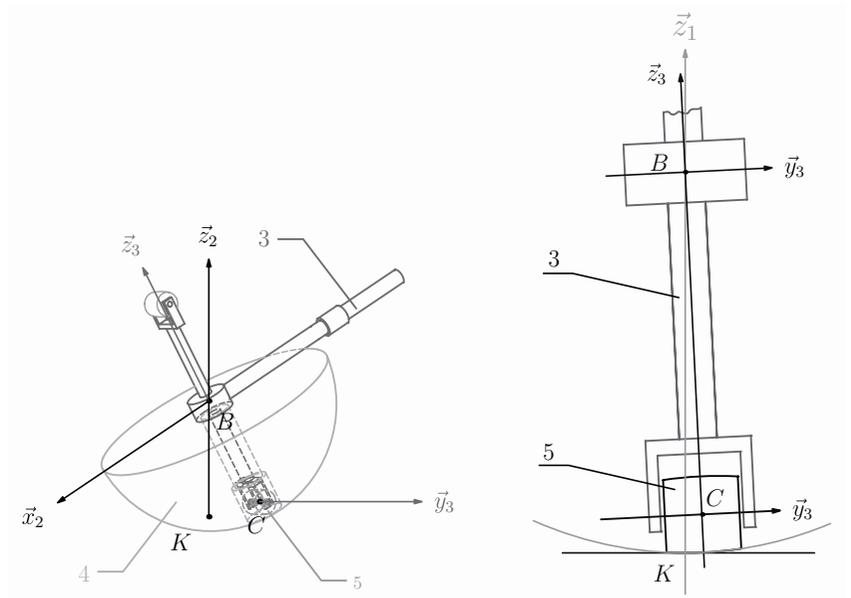


Figure 1.18 – Zoom sur l'arbre moteur 3 et les roulettes 5

Les objectifs de l'étude sont :

- de vérifier la capacité de déplacement en mouvement plan quelconque du chariot ;
- de déterminer la vitesse de chaque moteur pour obtenir un mouvement imposé ;
- de mettre en évidence les problèmes apparaissant lors des changements de contact.

Apport du contact d'une roue avec le sol

On suppose que le moteur entraîne l'arbre 3 dans une rotation caractérisée par l'angle φ , que la roue est en contact sans glissement avec le sol par le galet principal 4 au point K et que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(4/3) = \omega_{43}\vec{z}_3$ est inconnu.

1. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(B,2/1)$ par composition des mouvements 3/2, 4/1 et 4/3.
2. En déduire les expressions des deux quantités scalaires $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{x}_2$, $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{y}_2$. Sont-elles imposées par le moteur ?
3. Déterminer ces mêmes quantités dans le cas du galet 5, lorsque $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$.
4. On suppose $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{x}_2 = v_{x0}$ et $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{y}_2 = v_{y0}$, avec les quantités v_{x0} et v_{y0} constantes. Comment évolue ω_{43} pour φ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, -\varphi_0] \cup [\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$?

Application numérique :

$$R = 40\text{mm} \quad \varphi_0 = 0,1\text{rad} \quad v_{x0} = 0,2\text{m/s} \quad v_{y0} = 0,2\text{m/s}$$

5. En déduire la fonction du galet 5 ?

Cinématique du châssis par rapport au sol

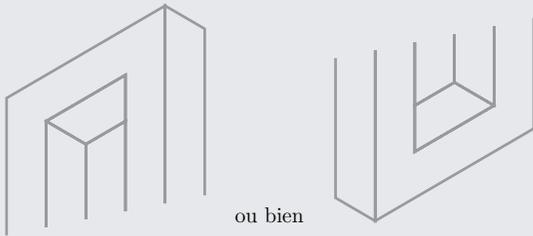
Les vitesses des trois moteurs sont désignées par ω_{32} , ω_{32b} et ω_{32c} .

6. En utilisant la particularité de $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{y}_2$ pour chaque roue, déterminer la vitesse de chaque moteur si on souhaite un chariot en translation rectiligne par rapport au sol caractérisée par la vitesse $v_{21} \vec{x}_2$.
7. Déterminer le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$ si $\omega_{32} = \omega_{32b} = \omega_{32c}$.

Du mal à démarrer ?

1.1 1. Parcourir les surfaces supposées être planes.

2. Découper par exemple la figure en deux, puis associer à la représentation conservée de l'objet un repère orthonormé direct.



1.2 1. Tracer les figures de calcul avec le vecteur commun sortant de la feuille et un angle petit et positif.

2. Chercher la figure sur laquelle apparaissent les deux vecteurs concernés et ne surtout pas projeter ces vecteurs sans raison particulière.

1.3 2. Organiser les calculs en identifiant les différents produits vectoriels à calculer.

1.4 1. Les figures sont-elles convenablement tracées ?

1.5 1. Pour un fonctionnement sans choc à l'apparition du contact entre le galet et la rainure, on souhaite le vecteur vitesse $\vec{V}(B,2/1)$ colinéaire au rayon \vec{CD} .

1.6 1. Quel vecteur vitesse est donné par l'énoncé ?

2. Quelle est la durée nécessaire pour balayer l'intervalle d'incertitude ?

1.7 1. Quelle est la définition d'un vecteur vitesse ?

2. Qu'est-ce qu'un torseur ?

1.8 2. Quels sont les mouvements correspondants à considérer ?

4. Essayer d'imaginer un solide 4 sur lequel le point I reste immobile au cours du temps.

1.9 Bien identifier les différentes liaisons à partir du schéma et du texte de présentation, puis utiliser la définition d'un mouvement de translation.

1.10 1. Ajouter les bases vectorielles et les angles caractérisant les pivots.

3. Le roulement sans glissement en un point P dans le mouvement i/k s'exprime par

$$\vec{V}(P,i/k) = \vec{0}$$

1.11 Mêmes recommandations que pour l'exercice 1.10.

1.12 Bien identifier les différentes liaisons à partir du schéma et du texte de présentation, puis utiliser la définition d'un mouvement de translation.

1.13 1. Faire un graphe de structure avec le porte satellite au centre.

3. Le roulement sans glissement en un point P dans le mouvement i/k s'exprime par

$$\vec{V}(P,i/k) = \vec{0}$$

1.14 1. Faire un graphe des liaisons et contacts, puis exprimer les torseurs cinématiques des mouvements connus. Enfin, exploiter le roulement sans glissement au point K pour éviter toutes les inconnues cinématiques associées au mouvement 4/1.

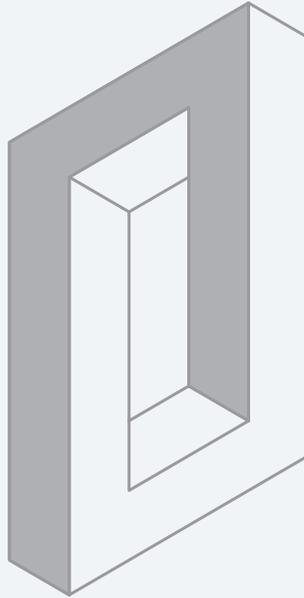
3. Répertoire, à partir de la question 1, les changements entre les deux configurations.

6. Faire une figure du chariot en vue de dessus.

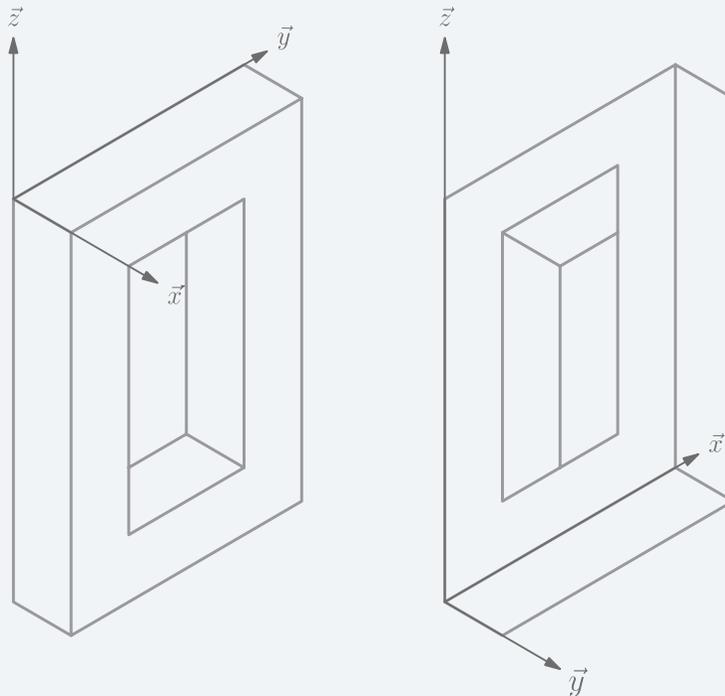
Corrigés des exercices

1.1 Appréhender l'espace

1. Teinter une des faces supposées être plane pose le problème. En partant du haut de la pièce, on se retrouve sur deux plans parallèles distants de plusieurs fois l'épaisseur de ce qui semble être un anneau...

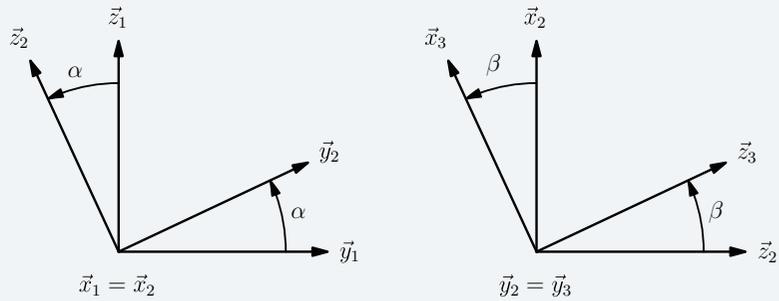


2. S'appuyer sur les projections d'un repère orthonormé permet de positionner les points les uns à partir des autres en suivant successivement une des directions principales.



1.2 Calcul vectoriel 1

1. Les figures de changement de base se tracent avec le vecteur commun sortant de la page et pour des angles petits et positifs.

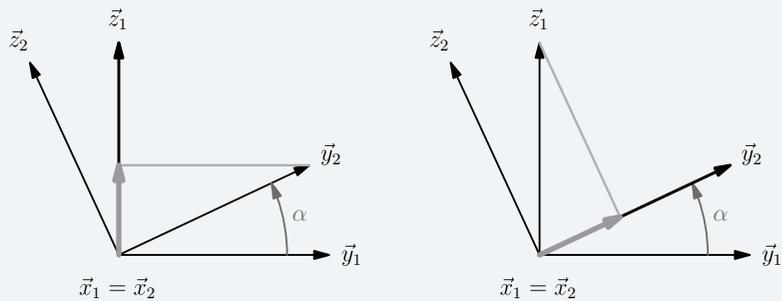


2. On détaille ci-dessous les principaux raisonnements concernant les différents calculs demandés.

• Calcul de $\vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1$:

Le produit scalaire fait intervenir des vecteurs colinéaires, et on rappelle l'utilisation des figures de calcul :

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- on projette orthogonalement \vec{y}_2 sur \vec{z}_1 , ou \vec{z}_1 sur \vec{y}_2 , comme cela est dessiné ci-dessous ;



- la composante projetée, en bleu foncé, et le vecteur unitaire concerné, en noir renforcé, regardent dans la même direction : le résultat du produit scalaire est positif ;
- la composante projetée correspond au petit côté du triangle rectangle, donc au sinus de l'angle α ;
- on trouve ainsi sans calcul particulier la valeur recherchée

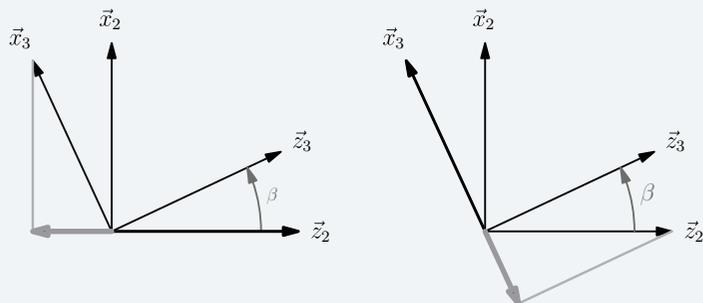
$$\vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1 = + \sin \alpha$$

• Calcul de $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$:

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- on trouve ainsi sans considération supplémentaire la valeur recherchée

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$$

• Calcul de $\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2$:

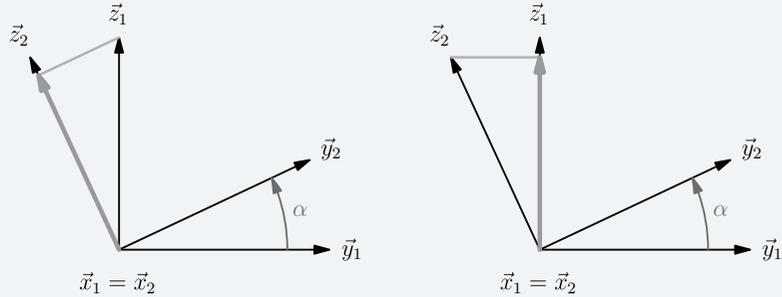


- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la deuxième figure ;
- on projette mentalement \vec{x}_3 sur \vec{z}_2 , ou \vec{z}_2 sur \vec{x}_3 ;
- la composante projetée et le vecteur unitaire concerné se tournent le dos, le résultat du produit scalaire est négatif ;
- la composante projetée correspond au petit côté du triangle rectangle, donc au sinus de l'angle β ;
- on écrit ainsi la valeur recherchée

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 = -\sin \beta$$

• Calcul de $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$:

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- on projette mentalement \vec{z}_1 sur \vec{z}_2 , ou \vec{z}_2 sur \vec{z}_1 ;



- la composante projetée et le vecteur unitaire concerné regardent dans la même direction, le résultat du produit scalaire est positif ;
- la composante projetée correspond au grand côté du triangle rectangle, donc au cosinus de l'angle α ;
- on propose alors comme résultat

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = \cos \alpha$$

• Calcul de $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3$:

- les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;
- la deuxième figure permet de rappeler l'égalité $\vec{y}_3 = \vec{y}_2$;
- le produit scalaire $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2$ se détermine à partir de la première figure

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 = \cos \alpha$$

• Calcul de $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$:

- les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;
- la deuxième figure permet de proposer

$$\vec{z}_3 = \cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{x}_2$$

les deux produits scalaires $\vec{z}_2 \cdot \vec{y}_1$ et $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$ se déterminent alors à partir de la première figure et on obtient

$$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = -\sin \alpha \cos \beta$$

- il est également possible d'exploiter la première figure pour dire

$$\vec{y}_1 = \cos \alpha \vec{y}_2 - \sin \alpha \vec{z}_2$$

les deux produits scalaires $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_2$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{z}_2$ se déterminent dans ce cas à partir de la deuxième figure et on obtient également

$$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = -\sin \alpha \cos \beta$$

3. On recommence avec les produits vectoriels.

• Calcul de $\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1$:

Le produit vectoriel fait intervenir des vecteurs orthogonaux, et on exploite alors les figures de calcul dans ce sens :

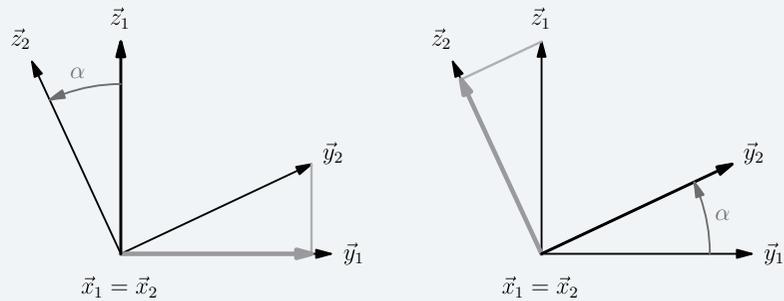
- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- le vecteur \vec{x}_1 est orthogonal à la feuille ;
- tourner de \vec{z}_2 vers \vec{x}_1 génère le vecteur $+\vec{y}_2$.

Constatant dès le départ l'égalité $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, il est évidemment possible dans ce cas de dire directement

$$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 = \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}_2$$

• Calcul de $\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1$:

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- on passe au plus court du vecteur \vec{y}_2 au vecteur \vec{z}_1 en tournant dans le sens positif, le résultat est en conséquence dirigé par $+\vec{x}_1$;
- on projette mentalement \vec{y}_2 sur \vec{y}_1 , ou \vec{z}_1 sur \vec{z}_2 , comme cela est dessiné ci-dessous ;

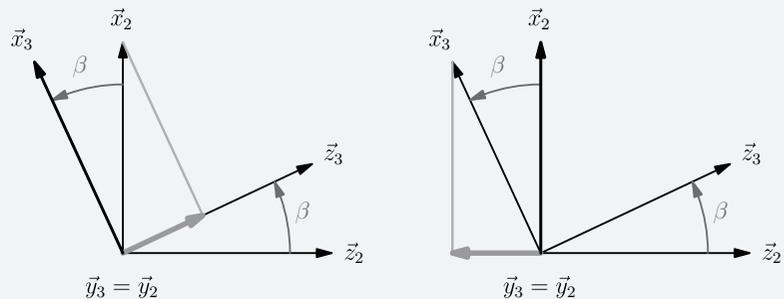


- peu importe le choix fait, intervient dans les deux cas le grand côté du triangle rectangle, donc le cosinus de l'angle α ;
- la synthèse des deuxième et quatrième points permet de proposer le résultat

$$\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1 = \cos \alpha \vec{x}_1$$

• Calcul de $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$:

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la deuxième figure ;
- on passe au plus court du vecteur \vec{x}_3 au vecteur \vec{x}_2 en tournant dans le sens négatif, le résultat est en conséquence dirigé par $-\vec{y}_2$;
- on projette mentalement \vec{x}_2 sur \vec{z}_3 , ou \vec{x}_3 sur \vec{z}_2 ;



- peu importe le choix fait, intervient dans les deux cas le petit côté du triangle rectangle, donc le sinus de l'angle β ;
- la synthèse des deuxième et quatrième points permet de proposer le résultat

$$\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \beta \vec{y}_2$$

• Calcul de $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3$:

- les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;
- la première figure permet de rappeler l'égalité $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$;

– le produit vectoriel $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3$ se détermine à partir de la deuxième figure

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3 = -\cos \beta \vec{y}_2$$

• Calcul de $\vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2$:

– les deux vecteurs sont colinéaires, le résultat est donc nul ;

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2 = \vec{0}$$

• Calcul de $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3$:

– les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;

– la deuxième figure permet de proposer

$$\vec{x}_3 = \cos \beta \vec{x}_2 - \sin \beta \vec{z}_2$$

les deux produits vectoriels $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2$ se déterminent alors à partir de la première figure et on obtient

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \sin \alpha \vec{x}_1$$

– il est également possible d'exploiter la première figure pour dire

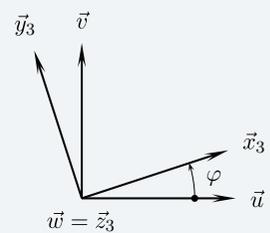
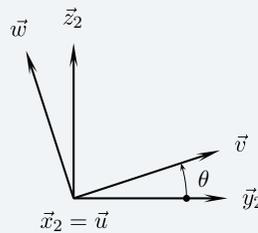
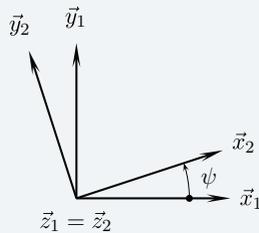
$$\vec{z}_1 = \cos \alpha \vec{z}_2 + \sin \alpha \vec{y}_2$$

les deux produits vectoriels $\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3$ et $\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3$ se déterminent dans ce cas à partir de la deuxième figure et on obtient une expression alternative du résultat

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \cos \alpha \vec{y}_3 - \sin \alpha \vec{z}_3$$

1.3 Calcul vectoriel 2

1. Figures de changement de base.



2. Le calcul du produit vectoriel $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$ est à organiser en plusieurs étapes :

• par substitution, on pose le produit vectoriel à effectuer

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = (p\vec{z}_1 + q\vec{x}_2 + r\vec{z}_3) \wedge b\vec{z}_3$$

• trois termes sont alors à étudier :

– le troisième est nul

$$r\vec{z}_3 \wedge b\vec{z}_3 = \vec{0}$$

– vu l'égalité $\vec{x}_2 = \vec{u}$, le deuxième se détermine à partir de la troisième figure de calcul

$$q\vec{x}_2 \wedge b\vec{z}_3 = -qb\vec{v}$$

– avec les deux égalités $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ et $\vec{z}_3 = \vec{w}$, le premier terme se détermine immédiatement à partir de la deuxième figure de calcul

$$p\vec{z}_1 \wedge b\vec{z}_3 = pb \sin \theta \vec{u}$$

• il ne reste plus qu'à rassembler les différents termes pour proposer l'expression finale

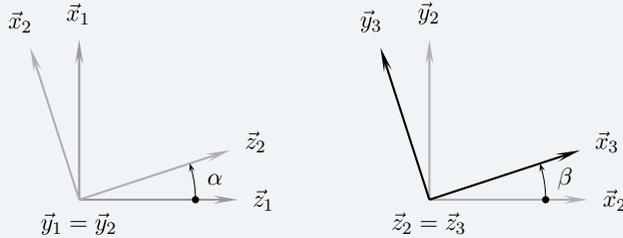
$$\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = b(p \sin \theta \vec{u} - q \vec{v})$$

1.4 Calcul vectoriel 3

1. Les deux figures de changement de bases posent souci :

- pour l'angle α , les deux vecteurs $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$ « rentrent » dans la feuille et l'angle α est dans ce cas négatif, ce qui induit des erreurs de signe dans les calculs ;
- l'angle β est représenté bien trop grand, ce qui favorise les confusions entre les sinus et les cosinus.

Il est nécessaire de les refaire pour ne pas faire d'erreur et ne pas perdre de temps lors des calculs à suivre



2. Les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 &= \sin \alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 &= -\sin \alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 &= \cos \beta \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3 &= -\sin \beta \cos \alpha\end{aligned}$$

Les produits vectoriels :

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 &= \cos \alpha \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 &= \vec{z}_2 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3 &= -\cos \beta \vec{z}_2 \\ \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3 &= \cos \beta \vec{z}_1 - \sin \alpha \sin \beta \vec{y}_1 \\ &= -\sin \alpha \vec{x}_3 + \cos \alpha \cos \beta \vec{z}_3\end{aligned}$$

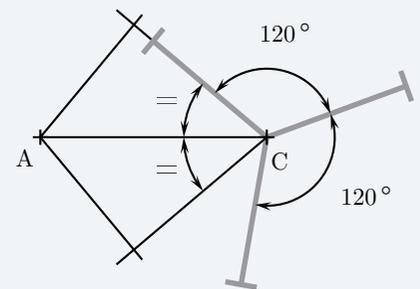
1.5 Croix de Malte

1. Un fonctionnement continu et sans choc du mécanisme induit plusieurs contraintes :

- La roue menée comporte trois rainures équivalentes : ces trois rainures sont donc disposées à 120° .

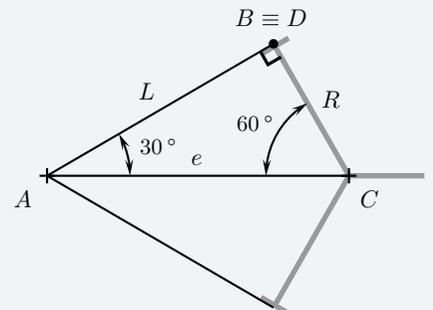
Pour un fonctionnement sans choc à l'apparition du contact entre le galet et la rainure, on souhaite le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/1)$ colinéaire au rayon \vec{CD} . En effet,

$$\vec{V}(B, 2/1) = \vec{V}(B, 2/3) + \underbrace{\vec{V}(B, 3/1)}_0$$



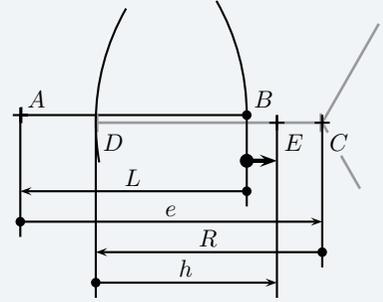
- Pour que le rainure suivante soit engagée au deuxième tour, la roue menée doit être symétrique par rapport à AC. On arrive ainsi à la configuration qui permet de déterminer la valeur des deux premiers paramètres

$$L = e \cos 30 \quad R = e \cos 60$$



- La profondeur h des rainures se détermine lorsque les points A , D , B , E et C sont alignés. On souhaite alors dans cette situation $\overline{BE} \geq 0$. Cette inégalité se traduit par

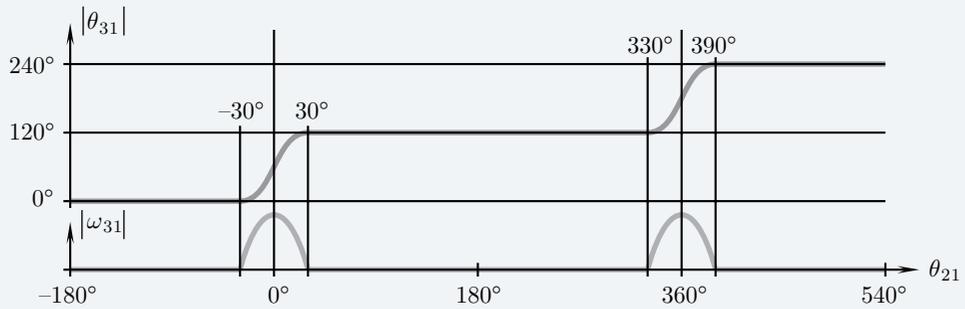
$$-L + e - R + h \geq 0$$



Les différentes valeurs à retenir pour les paramètres sont ainsi

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2}e \quad R = \frac{e}{2} \quad h \geq \frac{e}{2}(\sqrt{3} - 1) \quad (1)$$

2. L'allure des courbes peut être proposée à partir des considérations précédentes. Avec l'angle θ_{21} défini par l'énoncé, on démarre à -180 degrés et il y a entraînement de la roue menée entre -30 et $+30$ degrés lors du premier tour, entre 330 et 390 degrés lors du deuxième tour.



1.6 Robot piqueur

1. Vitesse de rotation du bras 1 par rapport à 0.

Mise en place du vecteur $\vec{V}(B, 3/0)$: le mouvement 3/0 est une translation rectiligne, verticale ascendante, à la vitesse de 1 m/s. La flèche correspondante de 50 mm peut être tracée. De plus, comme le point B est le CIR du mouvement 3/2, on en déduit

$$\vec{V}(B, 2/0) = \vec{V}(B, 3/0)$$

Le mouvement 1/0 est une rotation d'axe (O, \vec{z}) , donc

$$\vec{V}(A, 1/0) = \omega_{10} \vec{z} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 1/0)$ est perpendiculaire au rayon \overrightarrow{OA} . De plus, comme le point A est le CIR du mouvement 2/1, on en déduit

$$\vec{V}(A, 2/0) = \vec{V}(A, 1/0)$$

On applique la propriété d'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse du mouvement (2/0) entre les points A et B

$$\vec{V}(B, 2/0) \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{V}(A, 2/0) \cdot \overrightarrow{BA}$$

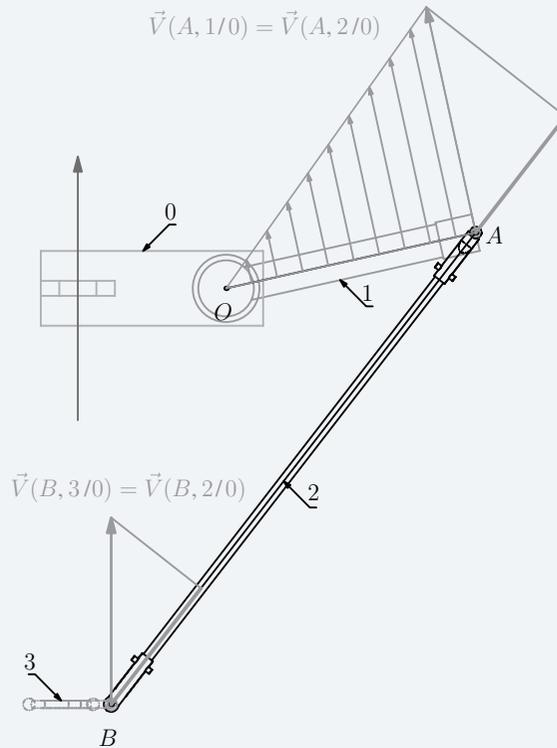
d'où la détermination complète du vecteur vitesse $\vec{V}(A, 1/0)$

$$\|\vec{V}(A, 1/0)\| = 1,23 \text{ m/s}$$

On en déduit :

$$\omega_{10} = \frac{\|\vec{V}(A, 1/0)\|}{\|\vec{OA}\|} = 3,6 \text{ rd/s}$$

$$\vec{V}(A, 1/0) = \vec{V}(A, 2/0)$$



$$\vec{V}(B, 3/0) = \vec{V}(B, 2/0)$$

2. Dans le mouvement 3/0, la distance de 0,1 mm est parcourue en $\Delta t = 10^{-4}$ s. Pendant cette durée, la rotation du bras 1 par rapport au bâti 0 est de $\omega_{1/0} \Delta t = 3,6 \cdot 10^{-4}$ rd.

L'erreur de positionnement tolérée pour le bras est donc de $\pm 3,6 \cdot 10^{-4}$ rd.

1.7 Mouvement d'un point

1. Il est nécessaire de revenir à la définition du vecteur vitesse, à savoir le vecteur dérivé d'un vecteur position, ici par exemple \vec{AB} , le point A étant immobile dans le repère d'observation.

$$\vec{V}(B/1) = \left[\frac{d \vec{AB}}{dt} \right]_1$$

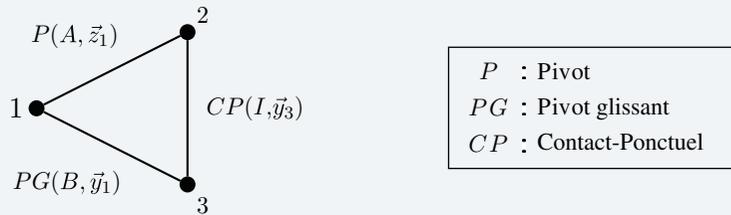
2. Le mouvement 2/1 étant entièrement caractérisé par le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$, le plus efficace est d'utiliser la relation de changement de points sur le mouvement 2/1.

$$\vec{V}(B, 2/1) = \vec{V}(C, 2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{CB}$$

3. La réponse la plus immédiate est de dire : « Il suffit que le point géométrique B soit un point fixe du solide 2 ». Ce n'est pas faux, mais cela ne met pas le doigt sur la principale difficulté, qui est d'utiliser pour la description du vecteur position de la première proposition un paramétrage compatible avec le mouvement de solide considéré de la deuxième proposition. La dernière question de l'exercice suivant illustre ce problème.

1.8 Mécanisme à excentrique

1. On commence par tracer le graphe des liaisons et contact



Cette structure comporte trois solides et on dénombre alors 6 mouvements de solides possibles :

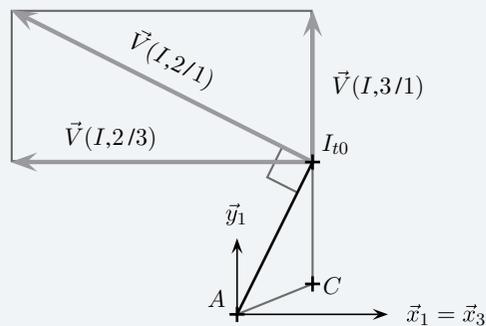
$$2/1 \text{ et } 1/2 \quad 3/1 \text{ et } 1/3 \quad 2/3 \text{ et } 3/2$$

2. On écrit la loi de composition des vitesses au point I

$$\vec{V}(I,2/1) = \vec{V}(I,2/3) + \vec{V}(I,3/1)$$

Reste à caractériser chacun des mouvements :

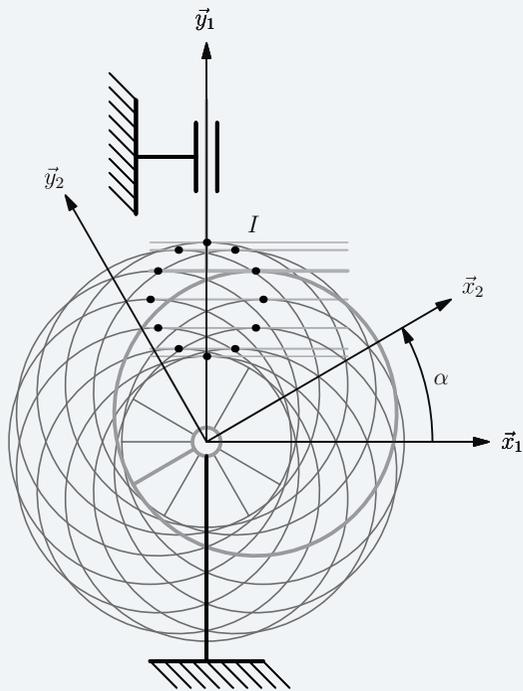
- l'excentrique 2 est en mouvement de rotation par rapport au bâti 1, et on pose en conséquence le vecteur vitesse $\vec{V}(I,2/1)$ perpendiculaire au rayon AI ;
- le piston 3 est en translation rectiligne de direction \vec{y}_1 par rapport au bâti 1 ;
- la vitesse de glissement $\vec{V}(I,2/3)$ est dans le plan tangent, suivant \vec{x}_3 .



3. Les différents points I à considérer sont coïncidents lors du contact, par exemple à une date t_0 , et suivent leurs mouvements respectifs le reste du temps :

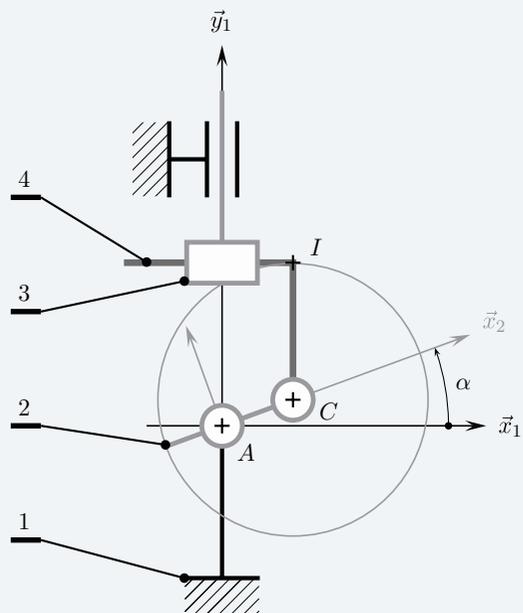
- concernant le mouvement 2/1, le point I a comme trajectoire le cercle de centre A et de rayon (AI_{t_0}) ;
- le point I se déplace sur la droite (I_{t_0}, \vec{y}_1) lors du mouvement 3/1 ;
- le point I glisse sur la droite (I_{t_0}, \vec{x}_3) lors du mouvement 2/3.

4. Pour comprendre le problème, on trace différentes positions successives du mécanisme pour suivre le point de contact dans son mouvement par rapport au bâti. Le mouvement de ce point apparaît clairement différent des mouvements des points coïncidents précédents.



Identifier sans ambiguïté le vecteur vitesse que l'on appelle $\vec{V}(I/1)$ nécessite d'introduire un solide virtuel 4 auquel on puisse associer ce point géométrique, afin de retrouver une description de mouvements de solides et d'avoir à déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(I,4/1)$:

- le point de contact suit le cercle de centre C sur l'excentrique : on imagine alors une liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_2) entre l'excentrique 2 et le solide 4 ;
- le point de contact glisse sur le piston 3 : on imagine alors une liaison glissière de direction \vec{x}_3 entre le piston et ce solide 4.



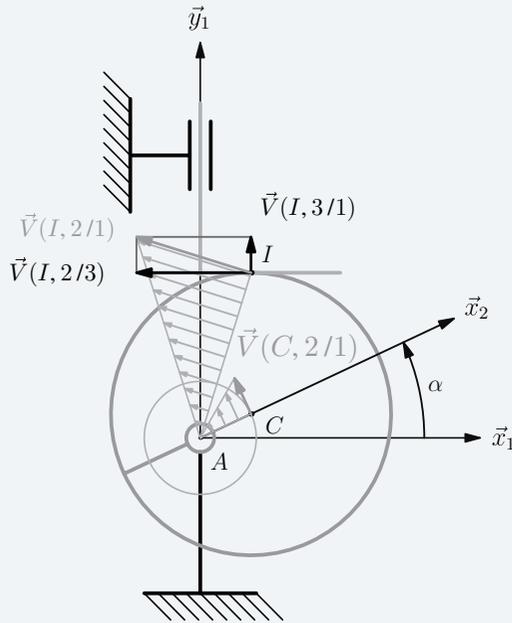
Il est possible alors de montrer que le solide 4 est en translation circulaire par rapport au bâti 1 et on a

$$\vec{V}(I,4/1) = \vec{V}(C,4/1)$$

La composition des vitesses au point C permet d'ajouter

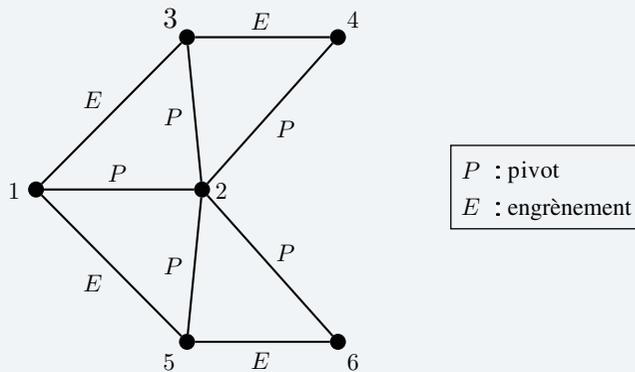
$$\vec{V}(C,4/1) = \vec{V}(C,2/1)$$

Le champ des vecteurs vitesse du mouvement 2/1 permet de conclure

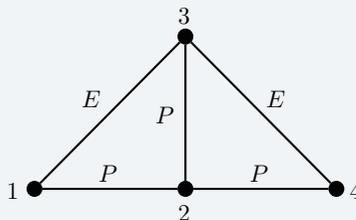


1.9 The Falkirk Wheel

1. Le mécanisme étudié comporte quatre chaînes fermées de six solides.



Ce mécanisme présente une symétrie de structure, complétée d'une symétrie de propriétés géométriques. En conséquence, on peut se limiter à l'étude de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.



2. Montrer que le bac 4 est en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1 nécessite deux étapes :

- calculer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(4/1)$ et montrer qu'il est à chaque instant nul ;
- identifier la trajectoire d'un point dans le mouvement 4/1 et vérifier qu'elle est circulaire.

On écrit les torseurs cinématiques associés aux trois liaisons pivot

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{21} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{V}(4/2) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{42} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{V}(3/2) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{32} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

La composition des vecteurs rotation sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 4 permet d'écrire

$$\vec{\Omega}(4/1) = \omega_{41} \vec{z}_2, \text{ avec } \omega_{41} = \omega_{42} + \omega_{21} \quad (1)$$

On n'a pas besoin de caractériser les torseurs cinématiques associés aux engrenements, car on reconnaît à partir du graphe des liaisons deux mécanismes « engrenage », pour lesquels les trois axes de rotation des liaisons pivot sont immobiles dans un repère attaché au bras motorisé 2. Les rapports de transmission s'expriment alors simplement

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = -\frac{Z_1}{Z_3} \quad \frac{\omega_{42}}{\omega_{32}} = -\frac{Z_3}{Z_4}$$

On multiplie membre à membre ces deux dernières équations pour éliminer la vitesse de rotation ω_{32}

$$\frac{\omega_{42}}{\omega_{12}} = +\frac{Z_1}{Z_4}$$

Il suffit d'exploiter ensuite l'équation (1) pour écrire

$$\frac{\omega_{41} - \omega_{21}}{-\omega_{21}} = +\frac{Z_1}{Z_4}$$

Le résultat recherché est immédiat après arrangement des termes précédents

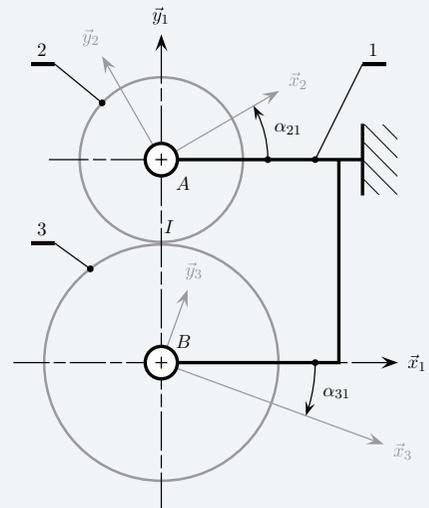
$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = +\frac{Z_4 - Z_1}{Z_4}$$

Les nombres de dents de la roue 4 et du bâti 1 sont identiques, on en déduit qu'à chaque instant, le taux de rotation ω_{41} est nul : les bacs b_4 et b_6 sont en mouvement de translation par rapport au bâti 1.

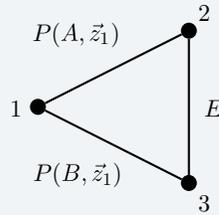
De plus, le point B est sur l'axe de rotation du mouvement 4/2 et le point B a une trajectoire circulaire dans le mouvement 2/1. On en déduit que le point B a également une trajectoire circulaire dans le mouvement 4/1 : les bacs b_4 et b_6 sont en conséquence en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1.

1.10 Engrenage

1. On complète l'épure fournie en ajoutant des bases vectorielles et en posant les angles associés aux liaisons pivot

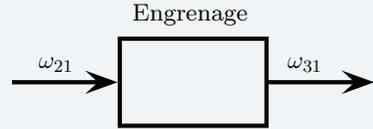


2. Un tel mécanisme engrenage comporte une chaîne fermée de trois solides.



$P(dte)$	pivot d'axe (dte)
E	engrènement

La loi entrée-sortie recherchée est la loi entre les fréquences de rotation des deux pignons par rapport au bâti.



3. On exprime l'absence de glissement au point I lors du mouvement 2/3

$$\vec{V}(I, 2/3) = \vec{0}$$

4. La composition des vitesses au point I permet d'écrire

$$\vec{V}(I, 2/1) = \vec{V}(I, 3/1) \quad (1)$$

• On change de point sur le mouvement 2/1

$$\vec{V}(I, 2/1) = \underbrace{\vec{V}(A, 2/1)}_{\vec{0}} + \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AI}, \text{ avec } \vec{AI} = -R_2 \vec{y}_1$$

comme le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 2/1)$ est nul, on en déduit

$$\vec{V}(I, 2/1) = R_2 \omega_{21} \vec{x}_1$$

• On change de point sur le mouvement 3/1, avec $\vec{BI} = R_3 \vec{y}_1$. Comme le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 3/1)$ est nul, on en déduit

$$\vec{V}(I, 3/1) = -R_3 \omega_{31} \vec{x}_1$$

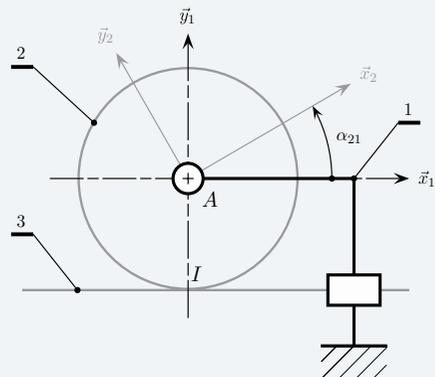
Par substitution des expressions dans l'équation 1, on en déduit

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{R_2}{R_3}$$

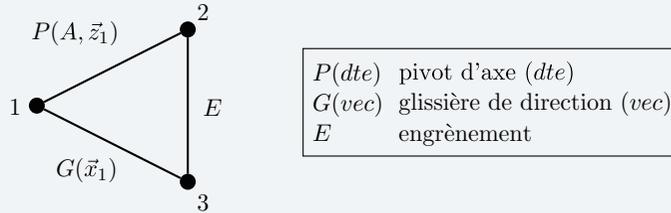
Comme les axes de rotation des liaisons pivot sont immobiles dans les mouvements 3/1 et 2/1, le rapport de transmission est le rapport inverse des rayons primitifs, avec dans ce cas un changement de signe.

1.11 Pignon-crémaillère

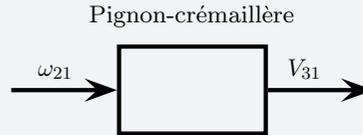
1. On complète l'épure fournie en ajoutant les bases vectorielles et en posant l'angle associé à la liaison pivot.



2. Un tel mécanisme comporte une chaîne fermée de trois solides.



La loi entrée-sortie recherchée est la loi entre la rotation du pignon 2 par rapport à 1 et la translation de la crémaillère 3 par rapport au bâti 1.



3. On exprime l'absence de glissement au point I lors du mouvement 2/3

$$\vec{V}(I, 2/3) = \vec{0}$$

4. La composition des vitesses au point I permet d'écrire

$$\vec{V}(I, 2/1) = \vec{V}(I, 3/1) \tag{1}$$

• On change de point sur le mouvement 2/1

$$\vec{V}(I, 2/1) = \underbrace{\vec{V}(A, 2/1)}_{\vec{0}} + \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AI}, \text{ avec } \vec{AI} = -R_2 \vec{y}_1$$

comme le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 2/1)$ est nul, on en déduit

$$\vec{V}(I, 2/1) = R_2 \omega_{21} \vec{x}_1$$

• Sur le mouvement 3/1, le champ des vecteurs vitesse est uniforme et on pose

$$\vec{V}(I, 3/1) = V_{31} \vec{x}_1$$

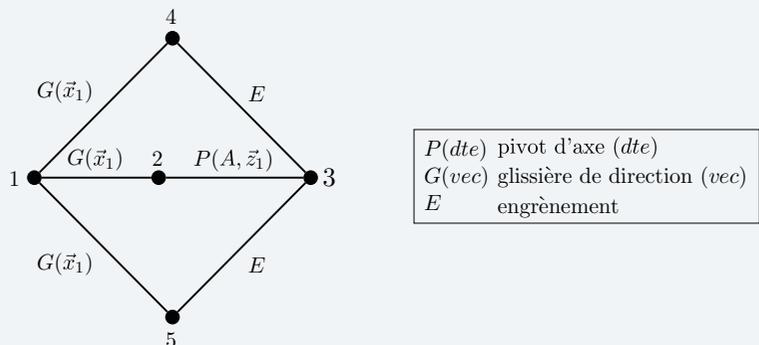
Après substitution des termes dans l'expression de l'équation 1, on peut écrire

$$V_{31} = R_2 \omega_{21}$$

Comme l'axe de rotation de la liaison pivot est immobile dans le mouvement 2/1, la vitesse de translation V_{31} est proportionnelle à la vitesse de rotation ω_{21} .

1.12 Différentiel linéaire

1. Le mécanisme étudié comporte deux chaînes fermées de cinq solides.



2. On utilise les vitesses scalaires posées par l'énoncé pour caractériser les torseurs cinématiques des trois liaisons glissière

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{21}\vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(4/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{41}\vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(5/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{51}\vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

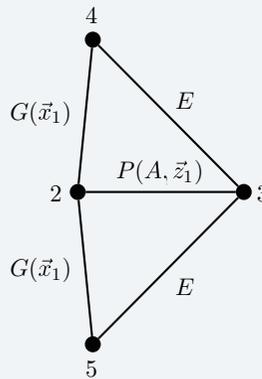
On exploite l'angle α posé et les phénomènes de non glissement aux « points d'engrènement » I et K pour caractériser les trois autres torseurs cinématiques

$$\mathcal{V}(3/2) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad \mathcal{V}(3/4) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/4) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I \quad \mathcal{V}(5/4) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(5/4) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K$$

3. Deux méthodes de résolution sont possibles :

- On cherche à identifier des chaînes fermées de trois solides avec comme liaisons pivot, glissière et engrènement.

Pour cela, on reconnaît sur les chaînes ouvertes 2 – 1 – 4 et 2 – 1 – 5 des liaisons équivalentes usuelles



L'axe de la liaison pivot est immobile dans le mouvement 3/2 et on peut alors écrire, en identifiant les signes au cas par cas

$$\begin{cases} V_{42} = -R_3\omega_{32} \\ V_{52} = +R_3\omega_{32} \end{cases}$$

La composition des mouvements sur les chaînes ouvertes invoquées précédemment permet de détailler l'équation recherchée

$$V_{41} - V_{21} = -(V_{51} - V_{21})$$

Après arrangement, on obtient finalement

$$V_{41} + V_{51} = 2V_{21} \quad (1)$$

- Il est également possible de repartir des expressions du non-glissement aux points de contact des primitifs.

$$\begin{cases} \vec{V}(I, 3/4) = \vec{0} \\ \vec{V}(K, 3/5) = \vec{0} \end{cases}$$

À partir de là :

– la composition des vitesses aux points I et K permet d'écrire

$$\begin{cases} \vec{V}(I, 3/2) = \vec{V}(I, 4/1) - \vec{V}(I, 2/1) \\ \vec{V}(K, 3/2) = \vec{V}(K, 5/1) - \vec{V}(I, 2/1) \end{cases}$$

– sur le mouvement 3/2, on montre que les deux vecteurs vitesse sont opposés

$$\vec{V}(I, 3/2) = -\vec{V}(K, 3/2)$$

– le résultat est alors immédiat, en remplaçant les vecteurs vitesse par leurs différentes expressions

$$V_{41} - V_{21} = -(V_{51} - V_{21})$$

On retrouve bien le résultat établi par la première méthode

$$V_{41} + V_{51} = 2V_{21} \quad (2)$$

4. On exploite l'équation 1 ou 2 pour aider au travail d'imagination.

- On bloque la translation 2/1 : dans ce cas, les crémaillères 4 et 5 se tradent de manière symétrique par rapport au bâti 1

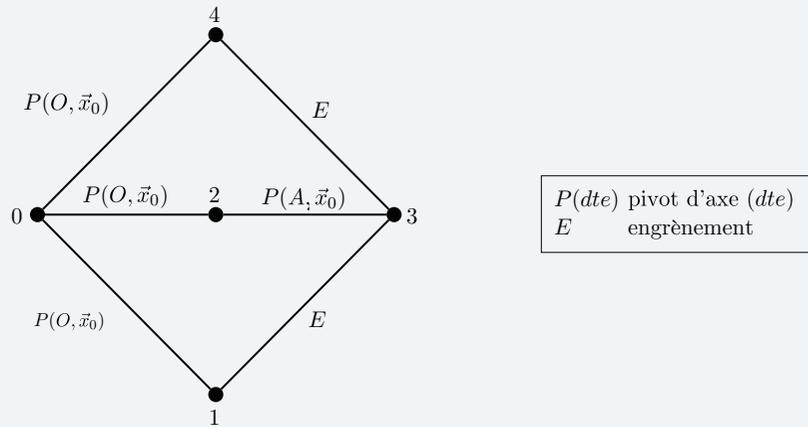
$$V_{21} = 0 \text{ et } V_{41} = -V_{51}$$

- On bloque la rotation 3/2 : les quatre pièces 2, 3, 4 et 5 sont immobiles les unes par rapport aux autres et cet ensemble *solide* se translate suivant \vec{x}_1 par rapport au bâti

$$V_{21} = V_{41} = V_{51}$$

1.13 Train épicycloïdal type 1

1. Le mécanisme étudié comporte deux chaînes fermées de cinq solides. On place le porte satellite au centre du graphe.



2. Fermeture des boucles internes en parcourant la maille commune dans le même sens.

$$\mathcal{V}(4/0) = \mathcal{V}(4/3) + \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/0)$$

$$\mathcal{V}(1/0) = \mathcal{V}(1/3) + \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/0)$$

On exploite les angles α , β , γ et ψ posés ainsi que les phénomènes de non glissement aux « points d'engrènement » I et J pour caractériser les torseurs cinématiques

$$O \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = I \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(4/3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + A \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + O \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$O \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + A \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + O \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

3. Pour chaque fermeture cinématique, on écrit les vitesses aux points d'engrènement pour ne pas faire apparaître les inconnues vectorielles indésirables $\vec{\Omega}(4/3)$ et $\vec{\Omega}(1/3)$.

$$\begin{cases} \dot{\psi} \vec{x}_0 \wedge \vec{OI} = \dot{\gamma} \vec{x}_0 \wedge \vec{AI} + \dot{\beta} \vec{x}_0 \wedge \vec{OI} \\ \dot{\alpha} \vec{x}_0 \wedge \vec{OJ} = \dot{\gamma} \vec{x}_0 \wedge \vec{AJ} + \dot{\beta} \vec{x}_0 \wedge \vec{OJ} \end{cases}$$

Il est à remarquer que

$$\vec{AJ} = -\vec{AI} = r_2 \vec{y}_2$$

Après sommation des deux fermetures cinématiques, on obtient finalement avec

$$\vec{OI} = r_4 \vec{y}_2$$

et

$$\vec{OJ} = r_3 \vec{y}_2$$

le résultat suivant

$$\dot{\psi} \vec{x}_0 \wedge r_4 \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{x}_0 \wedge r_3 \vec{y}_2 = \dot{\beta} \vec{x}_0 \wedge r_4 \vec{y}_2 + \dot{\beta} \vec{x}_0 \wedge r_3 \vec{y}_2$$

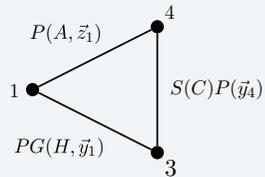
soit encore si

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_2 \neq \vec{0}$$

$$\frac{\dot{\psi} - \dot{\beta}}{\dot{\alpha} - \dot{\beta}} = -\frac{r_3}{r_4}$$

1.14 Pompe à débit variable

1. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de trois solides

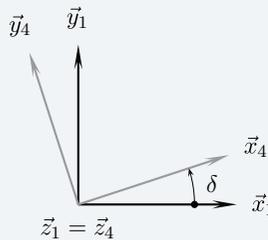


$P(dte)$	pivot d'axe (<i>dte</i>)
$PG(dte)$	pivot glissant d'axe (<i>dte</i>)
$S(pt)P(vec)$	sphère de centre (<i>pt</i>) de normale (<i>vec</i>)

2. L'angle δ est posé pour le mouvement 4/1 et le vecteur \vec{HC} s'interprète comme un vecteur position du point C dans le mouvement 3/1. Les torseurs cinématiques associés aux liaisons sont ainsi

$$\mathcal{V}(4/1) = \begin{Bmatrix} \delta \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad \mathcal{V}(3/1) = \begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{y}_1 \\ \dot{\lambda} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_C \quad \mathcal{V}(3/4) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/4) \\ \vec{V}(C, 3/4) \perp \vec{y}_4 \end{Bmatrix}$$

On trace la figure de calcul pour l'angle δ avec le vecteur commun aux deux bases sortant de la feuille et pour un angle petit et positif.



3. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, on a donc six équations scalaires à disposition, pour un total de huit inconnues cinématiques.

4. Pour trouver au plus vite la loi entrée-sortie recherchée, il s'agit de commencer par éviter les cinq inconnues de la liaison sphère plan. Pour cela, on écrit la composition des vitesses au point C scalaire \vec{y}_4

$$\underbrace{\vec{V}(C, 3/4) \cdot \vec{y}_4}_{=\vec{0}} + \vec{V}(C, 4/1) \cdot \vec{y}_4 = \vec{V}(C, 3/1) \cdot \vec{y}_4 \quad (1)$$

On constate que la sixième inconnue indésirable pour la loi entrée-sortie recherchée, ω_{31} , est également évitée par ce choix.

Par ailleurs, il est important de constater qu'aucune autre équation n'est pertinente :

- les cinq inconnues de la liaison sphère plan sont évitées avec une composition des vitesses en tout point de la droite (C, \vec{y}_4) ;
- l'inconnue ω_{31} est évitée avec une composition des vitesses en tout point de la droite (C, \vec{y}_3) ;
- le point C est le seul point commun à ces deux droites.

La résolution se poursuit en calculant les deux termes non nuls de l'équation (1) :

- le terme de droite est immédiat

$$\vec{V}(C,3/1) \cdot \vec{y}_4 = \dot{\lambda} \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_4 = \dot{\lambda} \cos \delta \quad (2)$$

- le terme de gauche nécessite un traitement plus complexe :

– on commence par un changement de point sur le mouvement 4/1

$$\vec{V}(C,4/1) \cdot \vec{y}_4 = \left(\delta \vec{z}_1 \wedge \vec{AC} \right) \cdot \vec{y}_4$$

– pour le calcul du produit mixte, le vecteur \vec{AC} peut être décrit de deux manières :

– en passant par le point B

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= -e\vec{y}_4 + \mu\vec{x}_4 - R\vec{y}_4 \end{aligned}$$

– en passant par le point H

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \vec{AH} + \vec{HC} \\ &= d\vec{x}_1 + \lambda\vec{y}_1 \end{aligned}$$

on choisit le chemin qui évite d'introduire l'inconnue géométrique μ et on obtient

$$\left(\delta \vec{z}_1 \wedge (d\vec{x}_1 + \lambda\vec{y}_1) \right) \cdot \vec{y}_4 = \delta (d \cos \delta + \lambda \sin \delta) \quad (3)$$

En combinant les deux résultats (2) et (3), on obtient comme loi entrée-sortie

$$\dot{\lambda} = \delta (d + \lambda \tan \delta) \quad (4)$$

Ce n'est pas la forme demandée et cette équation n'est pas très sympathique ! Il reste néanmoins possible de deviner une forme intégrable en l'écrivant d'une autre manière

$$\dot{\lambda} \cos \delta - \delta \lambda \sin \delta = \delta d \cos \delta \quad (5)$$

Pour obtenir la forme de la loi entrée-sortie recherchée, il est de toutes les manières nécessaire de compléter cette étude par une équation issue d'une fermeture géométrique

$$\vec{AH} + \vec{HC} + \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{0}$$

Par substitution, on écrit

$$d\vec{x}_1 + \lambda\vec{y}_1 + R\vec{y}_4 + e\vec{y}_4 - \mu\vec{x}_4 = \vec{0}$$

Comme la longueur inconnue μ est à éviter, on multiplie scalairement cette dernière équation par \vec{y}_4 et on obtient

$$d\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_4 + \lambda\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_4 + R + e = 0$$

La figure de calcul associée à l'angle δ fournit les valeurs des deux produits scalaires et on en déduit

$$\lambda = \frac{d \sin \delta - e - R}{\cos \delta} \quad (6)$$

Si on dérive cette équation (6) par rapport au temps, on constate que l'on obtient bien l'équation (5).

Ce dernier résultat (6), une fois injecté dans l'équation (4), permet d'atteindre l'objectif poursuivi et le résultat final est

$$\dot{\lambda} = \dot{\delta} \left(\frac{d - (e + R) \sin \delta}{\cos^2 \delta} \right)$$

1.15 Robot SCARA

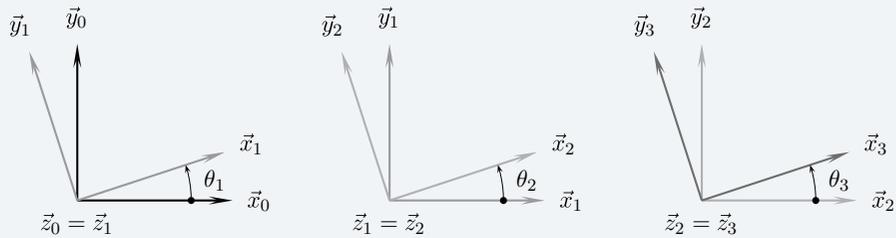
1. On exprime le vecteur position \vec{OP} en parcourant la chaîne ouverte de solides 0 - 1 - 2 - 3 - 4

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CP}$$

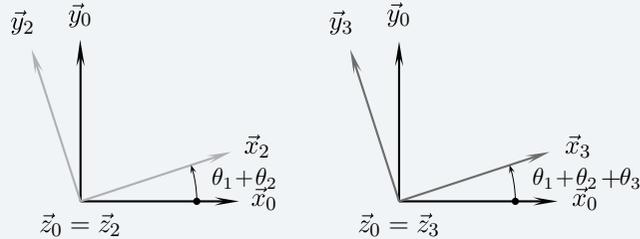
Par substitution, on obtient

$$\vec{OP} = a\vec{z}_0 + b\vec{x}_1 + c\vec{x}_2 + \rho\vec{z}_0$$

On trace les figures de calcul correspondant aux trois rotations



À partir de ces figures, on en dessine deux nouvelles

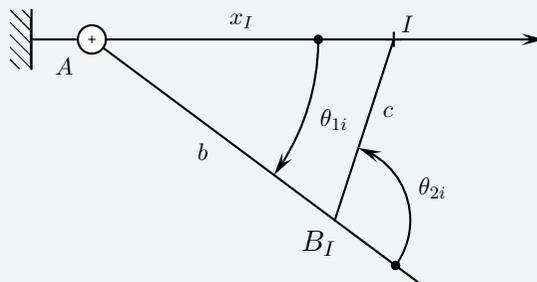


Les relations cherchées sont alors immédiates

$$\begin{cases} x = b \cos \theta_1 + c \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ y = b \sin \theta_1 + c \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ z = a + \rho \\ \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases}$$

2. On s'intéresse à partir de la figure 3 à deux triangles particuliers :

- au triangle $(AB_I I)$ pour la position initiale



On peut alors écrire à partir de l'équation de fermeture géométrique sur le triangle les deux relations intéressantes

$$\begin{cases} \overrightarrow{B_I I}^2 = (\overrightarrow{B_I A} + \overrightarrow{A I})^2 \\ \overrightarrow{A I}^2 = (\overrightarrow{A B_I} + \overrightarrow{B_I I})^2 \end{cases}$$

Après substitution et développement, on obtient

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + x_I^2 - 2ax_I \cos \theta_{1i} \\ x_I^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\pi - \theta_{2i}) \end{cases}$$

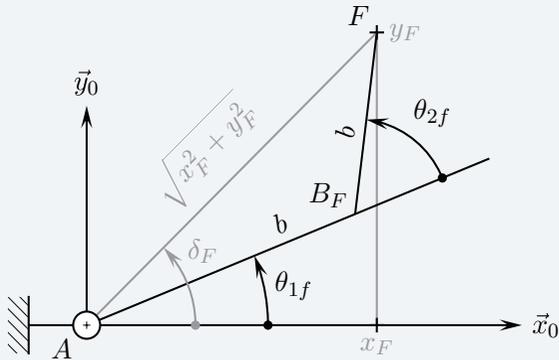
On en déduit les deux valeurs recherchées

$$\cos \theta_{1i} = \frac{a^2 + x_I^2 - b^2}{2ax_I} \quad \cos (\pi - \theta_{2i}) = \frac{a^2 + b^2 - x_I^2}{2ab}$$

Applications numériques

$$\theta_{1i} = -36.4^\circ \quad \theta_{2i} = 108.2^\circ$$

• au triangle $(AB_F F)$ pour la position finale



On peut alors également écrire à partir de l'équation de fermeture géométrique sur le triangle les deux relations intéressantes

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + x_F^2 + y_F^2 - 2a\sqrt{x_F^2 + y_F^2} \cos (\delta_F - \theta_{1f}) \\ x_F^2 + y_F^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\pi - \theta_{2f}) \end{cases}$$

On en déduit les deux valeurs recherchées

$$\cos (\delta_F - \theta_{1f}) = \frac{a^2 + x_F^2 + y_F^2 - b^2}{2a\sqrt{x_F^2 + y_F^2}} \quad \cos (\pi - \theta_{2f}) = \frac{a^2 + b^2 - x_F^2 - y_F^2}{2ab}$$

Applications numériques

$$\delta_F = 45^\circ \quad \theta_{1f} = 22.3^\circ \quad \theta_{2f} = 60.8^\circ$$

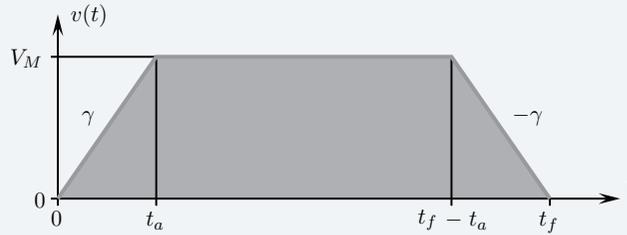
Concernant l'angle θ_3 , on exploite la quatrième relation de la question précédente

$$\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta_2$$

Une valeur de 90° est souhaitée pour l'angle α . On trouve ainsi comme valeurs numériques

$$\theta_{3i} = 18.2^\circ \quad \theta_{3f} = 7.9^\circ$$

3. La loi de commande est un trapèze de vitesse dont on rappelle l'allure.



On considère successivement les trois parties pour écrire

$$L = \frac{1}{2} \gamma t_a^2 + V_M (t_f - 2t_a) + \frac{1}{2} \gamma t_a^2$$

On pose alors $\gamma = \frac{V_M}{t_a}$ et le déplacement total s'exprime simplement par

$$L = V_M (t_f - t_a)$$

4. Avec $L = 400$ mm, $t_a = 0,2$ s et $V_M = 0,4$ m/s, on obtient

$$t_f = 1,2\text{s}$$

5. Deux manières sont possibles pour déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(P,4/0)$:

- soit par composition des mouvements pour obtenir la forme la plus simple du vecteur vitesse

$$\begin{aligned} \vec{V}(P,4/0) &= \vec{V}(P,4/3) + \vec{V}(P,3/2) + \vec{V}(P,2/1) + \vec{V}(P,1/0) \\ &= \dot{\rho} \vec{z}_3 + \vec{0} + \dot{\theta}_2 b \vec{y}_2 + \dot{\theta}_1 (a \vec{y}_1 + b \vec{y}_2) \end{aligned}$$

- soit par dérivation d'un des vecteurs position, méthode que privilégie ici l'énoncé par le rappel des coordonnées du point P dans la base 0

$$\vec{V}(P,4/0) = \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_0$$

On dérive ainsi dans la base 0 l'expression du vecteur position \vec{OP} pour trouver

$$\begin{aligned} \vec{V}(P,4/0) &= (-a\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - b(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin (\theta_1 + \theta_2)) \vec{x}_0 \\ &\quad + (a\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + b(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos (\theta_1 + \theta_2)) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

6. On identifie les expressions du vecteur vitesse issues des deux approches, structurelle et fonctionnelle, pour écrire un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} -a\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - b(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin (\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ a\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + b(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos (\theta_1 + \theta_2) = v \end{cases}$$

Sachant que $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin (x - y)$, on en déduit les deux expressions recherchées

$$\dot{\theta}_1 = \frac{v \sin (\theta_1 + \theta_2)}{a \sin \theta_2} \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = -\frac{v \sin \theta_1}{b \sin \theta_2}$$

Les accélérations angulaires s'obtiennent en dérivant par rapport au temps ces dernières expressions. On obtient d'une part

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\dot{v} \sin (\theta_1 + \theta_2)}{a \sin \theta_2} + \frac{v(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos (\theta_1 + \theta_2)}{a \sin \theta_2} - \frac{v \sin (\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{a \sin^2 \theta_2}$$

et d'autre part

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{\dot{v} \sin \theta_1}{b \sin \theta_2} - \frac{v \dot{\theta}_1 \cos \theta_1}{b \sin \theta_2} + \frac{v \sin \theta_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{b \sin^2 \theta_2}$$

7. On reprend les valeurs numériques trouvées à la question 2 pour calculer :

- position initiale, le point P en I

$$\dot{\theta}_{1i} = 0 \quad \ddot{\theta}_{1i} = 5 \text{ rd/s}^2 \quad \dot{\theta}_{2i} = 0 \quad \ddot{\theta}_{2i} = 0$$

- position finale, le point P en F

$$\dot{\theta}_{1f} = 0 \quad \ddot{\theta}_{1f} = -5,7 \text{ rd/s}^2 \quad \dot{\theta}_{2f} = 0 \quad \ddot{\theta}_{2f} = 9,2 \text{ rd/s}^2$$

8. Par changement de point sur le mouvement 2/0, on a

$$\vec{V}(G_2, 2/0) = \underbrace{\vec{V}(B, 2/0)}_{\dot{\theta}_1 a \vec{y}_1} + \underbrace{\vec{\Omega}(2/0)}_{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_1} \wedge \overrightarrow{BG_2}$$

Comme $\overrightarrow{BG_2} = a_2 \vec{x}_2 + b_2 \vec{z}_2$, on obtient comme expression

$$\vec{V}(G_2, 2/0) = a \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2$$

Par définition du vecteur accélération, on a

$$\vec{A}(G_2, 2/0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G_2, 2/0) \right]_0$$

Un calcul préliminaire donne

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0 &= \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \\ \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_0 &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_2 = -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{x}_2 \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\vec{A}(G_2, 2/0) = a \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - a \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 + a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2$$

9. On rappelle l'ensemble des données numériques concernant la position initiale

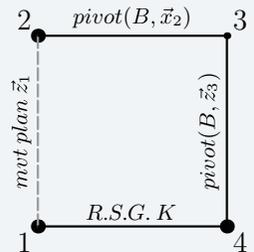
$$\begin{aligned} \theta_{1i} &= -36,4^\circ & \dot{\theta}_{1i} &= 0 & \ddot{\theta}_{1i} &= 5 \text{ rd/s}^2 \\ \theta_{2i} &= 108^\circ & \dot{\theta}_{2i} &= 0 & \ddot{\theta}_{2i} &= 0 \end{aligned}$$

Avec le rappel de $a = 0,400 \text{ m}$ et la donnée de $a_2 = 0,134 \text{ m}$, on peut alors calculer la valeur et la direction de l'accélération du point G_2 au démarrage à partir de l'expression

$$\vec{A}_{G_2 I} = \ddot{\theta}_{1i} (a \vec{y}_1 + a_2 \vec{y}_2)$$

1.16 Robot omni-roues

1. On commence par faire un graphe des liaisons lors du contact du galet principal avec le sol



La lecture de ce graphe permet de proposer une stratégie de résolution :

- On caractérise les torseurs cinématiques des trois arcs de la chaîne ouverte 1 – 2 – 3 – 4

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{V}(A,2/1) \perp \vec{z}_1 \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/2) = \begin{matrix} \omega_{32} \vec{x}_3 \\ B \left\{ \vec{0} \right. \end{matrix} \quad \mathcal{V}(4/3) = \begin{matrix} \omega_{43} \vec{z}_3 \\ B \left\{ \vec{0} \right. \end{matrix}$$

- Concernant le contact 4/1, le vecteur rotation $\vec{\Omega}(4/1)$ est inconnu et on exprime le roulement sans glissement au point K

$$\vec{V}(K,4/1) = \vec{0}$$

- En conséquence, toutes les inconnues cinématiques du torseur $\mathcal{V}(4/1)$ sont évitables en exploitant l'équation des vitesses au point K issue de la composition des mouvements sur la chaîne fermée 2 – 3 – 4 – 1 – 2

$$\vec{V}(K, 2/1) = \vec{V}(K, 2/3) + \vec{V}(K, 3/4) + \underbrace{\vec{V}(K, 4/1)}_{\vec{0}}$$

- Trois champs de vecteurs vitesse sont alors à parcourir :
– l'équiprojectivité du champ de vecteurs vitesse 2/1 permet d'écrire

$$\vec{V}(K, 2/1) = \vec{V}(B, 2/1) + \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{BK}$$

comme le vecteur \overrightarrow{BK} est colinéaire au vecteur \vec{z}_1 , on en déduit

$$\vec{V}(K, 2/1) = \vec{V}(B, 2/1)$$

- changement de point sur le mouvement 2/3

$$\vec{V}(K,2/3) = -\omega_{32} \vec{x}_{23} \wedge \overrightarrow{BK} = -\omega_{32} \vec{x}_{23} \wedge -R\vec{z}_2 = -\omega_{32} \vec{y}_2$$

- changement de point sur le mouvement 3/4

$$\vec{V}(K,3/4) = -\omega_{43} \vec{z}_3 \wedge \overrightarrow{BK} = -\omega_{43} \vec{z}_3 \wedge -R\vec{z}_2 = -\omega_{43} R \sin \varphi \vec{x}_2$$

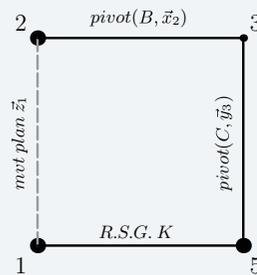
On obtient finalement

$$\vec{V}(B,2/1) = -\omega_{32} R \vec{y}_2 - \omega_{43} R \sin \varphi \vec{x}_2 \quad (1)$$

2. Les composantes scalaires du vecteur vitesse $\vec{V}(B,2/1)$ dans la base 2 sont immédiates

- $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{x}_2 = -\omega_{43} R \sin \varphi$, quantité indéterminée ;
- $\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{y}_2 = -\omega_{32} R$, quantité imposée par le moteur.

3. Dans le cas d'un contact au sol par le galet 5, le graphe des liaisons devient



La démarche à suivre est semblable à la précédente. La seule différence est observée sur le mouvement 3/5, pour lequel on calcule

$$\begin{aligned}\vec{V}(K,3/5) &= -\omega_{53} \vec{y}_3 \wedge \vec{CK} \\ &= -\omega_{53} \vec{y}_3 \wedge (\vec{CB} + \vec{BK}) \\ &= -\omega_{53} R \left(1 - \cos \varphi - \frac{a}{R}\right) \vec{x}_3\end{aligned}$$

On obtient en définitive

$$\vec{V}(B,2/1) = -\omega_{32} R \vec{y}_2 - \omega_{53} R \left(1 - \cos \varphi - \frac{a}{R}\right) \vec{x}_2$$

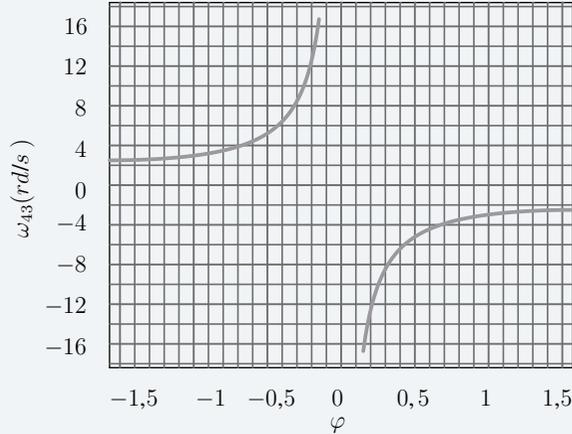
4. Pour constater l'évolution de la rotation libre ω_{43} , on s'intéresse à la quantité imposée

$$\vec{V}(B,2/1) \cdot \vec{x}_2 = v_{x0} = -\omega_{43} R \sin \varphi$$

On en déduit l'expression de ω_{43}

$$\omega_{43} = -\frac{v_{x0}}{R \sin \varphi}$$

On peut tracer la courbe correspondante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



La lecture de cette image permet deux remarques immédiates :

- Le taux de rotation $|\omega_{43}|$ est maximum pour $\varphi = \pm\varphi_0$.
- La vitesse ω_{43} change de signe avec φ .

Dans l'intervalle $[-\varphi_0; \varphi_0]$, c'est le galet secondaire 5 qui est actif avec

$$\omega_{53} = -\frac{v_{x0}}{R \left(1 - \cos \varphi - \frac{a}{R}\right)}$$

5. À la vue de la courbe précédente, on constate que la vitesse de rotation ω_{43} tend vers l'infini lorsque l'angle φ tend vers 0. La présence du galet secondaire permet ainsi de la limiter.

Par ailleurs, l'équation (1) permet également de répondre. En l'absence de galet secondaire et donc avec des galets principaux avec pôles, au moment où le contact se fait au pôle $\varphi = 0$, le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/1)$ a comme expression $\vec{V}(B, 2/1) = -\omega_{32} R \vec{y}_2$, quantité qui s'annule si $\omega_{32} = 0$, alors que la composante de cette vitesse sur \vec{x}_2 doit rester libre : il ne peut alors y avoir roulement sans glissement. La présence du galet secondaire est indispensable pour conserver une composante libre suivant \vec{x}_2 dans toutes les configurations.

Remarque : lorsque $\varphi = \varphi_0$, le galet principal remplace le galet secondaire 5, et sa vitesse de rotation est instantanément grande, alors qu'elle est susceptible d'être nulle lors de l'activité du galet secondaire. Cette situation est susceptible d'être gênante si les galets 4 n'ont pas une très faible inertie.

Plan

Les méthodes à retenir	45
Énoncés des exercices	46
Du mal à démarrer ?	59
Corrigés	60

Thèmes abordés dans les exercices

- exprimer un torseur d'actions mécaniques
- déterminer une composante d'action mécanique
- modéliser le phénomène de frottement
- rechercher une loi entrée-sortie

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- concept d'action mécanique
- points de vue local et global
- les modèles du physicien
- le frottement
- liaisons et transmissions
- les théorèmes de l'équilibre

Les méthodes à retenir

Pour caractériser une action mécanique globale à partir d'un modèle local

- Paramétrer la position du point courant.

➔ Exercices 2.1, 2.2

Pour déterminer une composante d'action mécanique particulière

- Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures.
- Dénombrer équations et inconnues.
- Chercher à éviter les inconnues indésirables.

➔ Exercices 2.2, 2.3, 2.4, 2.8

Pour utiliser une méthode graphique de résolution

- S'assurer d'une modélisation plane possible ou supposée.
- Identifier les ensembles soumis à l'action de deux glisseurs.
- Identifier les ensembles soumis à l'action de trois glisseurs.
- Respecter l'échelle des longueurs sur les schémas de situation et l'échelle des forces sur les dynamiques.

➔ Exercices 2.5, 2.9

Prendre en compte le phénomène de frottement

- Identifier les points de contact et les normales aux plans tangents associés.
- Se placer dans le cas du glissement ou de l'adhérence.
- Se placer à la limite du glissement pour résoudre si nécessaire.

➔ Exercices 2.6, 2.7, 2.9

Énoncés des exercices

2.1 Frottement fluide sur un malaxeur 1

On considère une pale filaire repérée 2 plongée dans un liquide visqueux. Elle tourne autour de l'axe (A, \vec{z}_2) par rapport à un bâti repéré 1, et cette rotation est caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{z}_2$.

On note $\vec{AB} = L\vec{x}_2$ et on pose $\vec{AP} = x\vec{x}_2$.

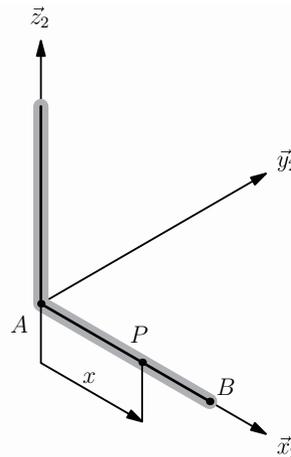


Figure 2.1 – L'axe tournant d'un malaxeur

On suppose l'action mécanique élémentaire du fluide sur la pale modélisable par une force linéique proportionnelle à la vitesse relative $\vec{q}(P) = -\mu \vec{V}(P, 2/1)$.

1. Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(P, 2/1)$.

2. Exprimer la force élémentaire $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$ appliquée à un élément de longueur dx centré au point courant P .
3. Déterminer le torseur modélisant l'action du fluide sur l'arbre 2, et préciser sa nature.

2.2 Frottement fluide sur un malaxeur 2

On considère une pale filaire repérée 2 en forme de quart de cercle de rayon R plongée dans un liquide visqueux. Elle est schématisée sur la figure 2.2 en liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_2) avec un bâti repéré 1, et la rotation 2/1 est caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{y}_2$.

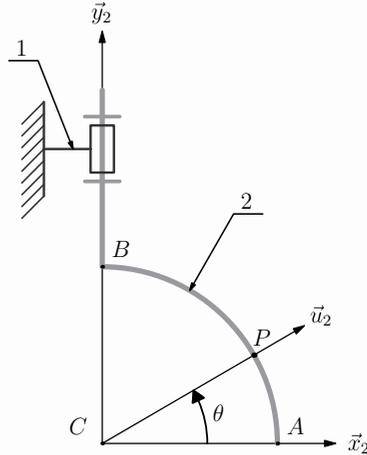


Figure 2.2 – Un axe de malaxeur en forme de quart de cercle

Le champ de pesanteur est donné par $\vec{g} = -g\vec{y}_1$, avec $g > 0$.

On suppose l'action mécanique élémentaire du fluide sur la pale modélisable par une force linéique proportionnelle à la vitesse relative $\vec{q}(P) = -\mu\vec{V}(P, 2/1)$.

1. À partir des indications de la figure 2.2, paramétrer la position du point courant P sur le solide 2.
2. Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(P, 2/1)$.
3. Exprimer la force élémentaire $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$ appliquée à un élément de longueur $Rd\theta$ centré au point courant P .
4. Déterminer le torseur modélisant l'action du fluide sur l'arbre 2, et préciser sa nature.

L'axe 2 est entraîné en rotation par un motoréducteur noté m dont l'action mécanique sur cet axe est modélisée par un couple suivant \vec{y}_1

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_1 \end{cases}$$

5. Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures $\vec{2} \rightarrow 2$.
6. Quelle équation issue du théorème de l'équilibre évite les inconnues scalaires de la liaison pivot ?

En supposant cette équation applicable sans donnée supplémentaire en régime permanent, déterminer la valeur du couple moteur C_m à exercer pour entretenir la rotation 2/1.

7. Le théorème de l'équilibre est-il applicable en régime permanent pour déterminer les actions mécaniques dans la liaison pivot ?

2.3 Étau hydraulique

Un étau dont la fonction est de serrer des pièces cylindriques P entre des mors en vé est schématisé sur la figure 2.3. Il comprend :

- un bâti 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{OC} = a\vec{x}_1$ et $\vec{OF} = h\vec{y}_1$;
- deux vés, encastrés sur deux coulisseaux 3 et 4 en liaison glissière de direction \vec{x}_1 avec le bâti ;
- un pignon 2 de rayon primitif R , guidé en rotation par une liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti. Ce pignon engrène avec deux crémaillères fixées respectivement sur les coulisseaux 3 et 4.

Les surfaces de contact entre un pignon et une crémaillère sont telles que le mouvement relatif des deux pièces reproduit le roulement sans glissement d'un cylindre de révolution fictif sur un plan fictif. Ce cylindre de révolution est appelé cylindre primitif, de rayon éponyme. Le plan est appelé plan primitif de la crémaillère. Tous les primitifs sont habituellement représentés à l'aide de traits mixtes fins.

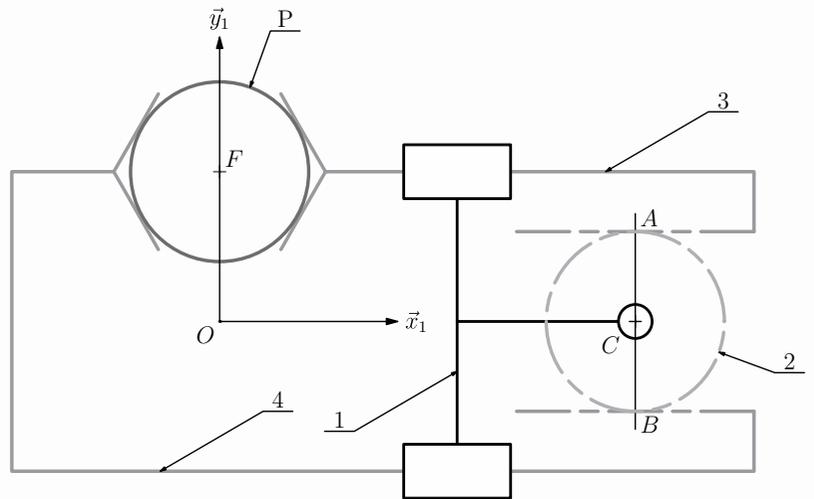


Figure 2.3 – Schéma de principe de l'étau auto-centrant

Un vérin V non représenté exerce sur le coulisseau 4 une action mécanique modélisée par

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} X\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Une fois la pièce à serrer en contact avec les mâchoires de l'étau, on pose comme actions mécaniques

$$\mathcal{F}(P \rightarrow 3) = F \begin{Bmatrix} +F\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(P \rightarrow 4) = F \begin{Bmatrix} -F\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

En phase de serrage, les actions mécaniques aux niveaux des engrènements sont modélisées par deux glisseurs

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) =_A \begin{cases} F_{23}(-\cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1) \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) =_B \begin{cases} F_{42}(+\cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1) \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'angle α est un angle caractéristique associé à la denture, appelé angle de pression.

Les poids des différentes pièces sont négligeables devant les efforts issus du serrage.

Données numériques :

$$\alpha = 20^\circ \quad L = 65 \text{ mm} \quad h = 25 \text{ mm} \quad R = 15 \text{ mm} \quad F = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N}$$

1. Élaborer un graphe des liaisons de ce mécanisme en l'absence de pièce à serrer.
2. Dans quel sens le pignon 2 tourne-t-il par rapport au bâti 1 en phase de serrage ?
3. Le serrage étant réalisé, proposer une stratégie pour trouver la relation $X = f(N)$.
4. Déterminer les expressions des inconnues de liaison en se limitant aux inconnues associées au problème plan.
5. Faire les applications numériques.

2.4 Barrière articulée

On considère une barrière articulée de parking telle que représentée figure 2.4 et schématisée figure 2.5.

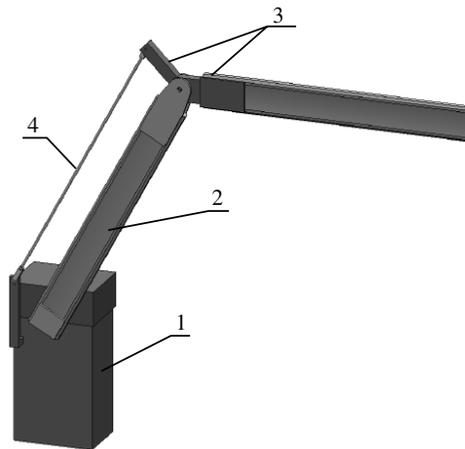


Figure 2.4 – Vue de la barrière articulée

Elle comprend quatre ensembles principaux, détaillés ci-dessous, conçus et assemblés de manière à obtenir le parallélogramme $(ABDE)$.

- Un bâti 1 est fixé au sol :
 - on lui associe deux repères, $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $(A, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_1)$, avec $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{v}_1)$;
 - on pose $\vec{AE} = a\vec{v}_1$.
- Un bras 2 est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti :
 - on lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$, avec $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
 - on pose $\vec{AB} = L\vec{x}_2$;

– ce bras est de masse $m_2 = m$, de centre de masse G_2 , avec $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- Un avant-bras 3 est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_2) avec le bras 2 :
 - pour obtenir au montage un parallélogramme, on pose $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$;
 - l'avant-bras est de masse $m_3 = m$, de centre de masse G_3 et on admet à chaque instant $\overrightarrow{BG_3} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$.
- Une biellette 4 est en liaison sphérique de centre E avec le bâti 1 et en liaison sphérique de centre D avec l'avant-bras 3 :
 - la longueur ED est choisie égale à L et on admet à chaque instant $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$;
 - la masse de la biellette est négligeable devant les masses des bras et avant-bras.

Toutes les liaisons sont supposées sans frottement.

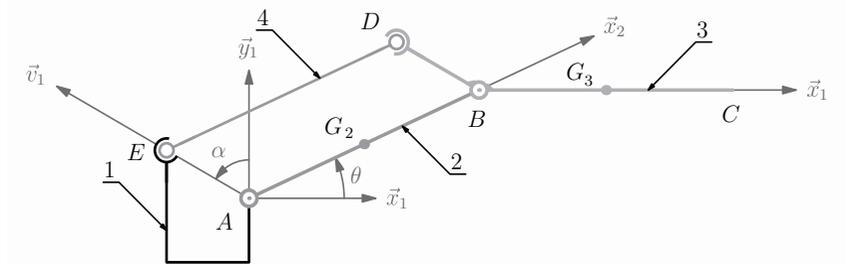


Figure 2.5 – Schéma cinématique de la barrière

La pesanteur caractérisée par $\vec{g} = -g\vec{y}_1$ n'est prise en compte que pour les solides 2 et 3.

En cas d'absence d'action motrice d'ouverture ou de fermeture, un frein non représenté permet au bâti 1 d'exercer sur le bras 2 un couple de moment $C_f\vec{z}_1$ afin de maintenir le mécanisme en équilibre par rapport au sol.

L'objectif de cet exercice est le dimensionnement du frein : il importe donc de déterminer l'expression du moment C_f en fonction du poids des pièces pour toute position d'équilibre de la barrière.

1. Déterminer le nombre d'inconnues statiques de liaison, et identifier toutes les autres composantes d'action mécanique à retenir.
2. Proposer une stratégie de résolution.
3. Déterminer la relation $C_f = g(\theta)$, exprimée en fonction de la masse m et des grandeurs géométriques L , a et α du mécanisme.
4. Comparer ce dernier résultat avec le couple nécessaire au maintien d'une barrière rectiligne (AC) de longueur $2L$ et de masse $2m$.

2.5 Mécanisme à compas pour benne

On considère le mécanisme à compas photographié figure 2.6. Ce mécanisme compact a été conçu pour lever les bennes de camion par l'action d'un vérin hydraulique.

Le référentiel supposé galiléen est noté 1 et on pose \vec{z}_1 la normale sortante au plan de la figure 2.7 qui illustre quatre positions différentes du mécanisme. On pose \vec{y}_1 la verticale ascendante de cette figure et \vec{x}_1 pour que la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ soit une base ortho-normée directe.

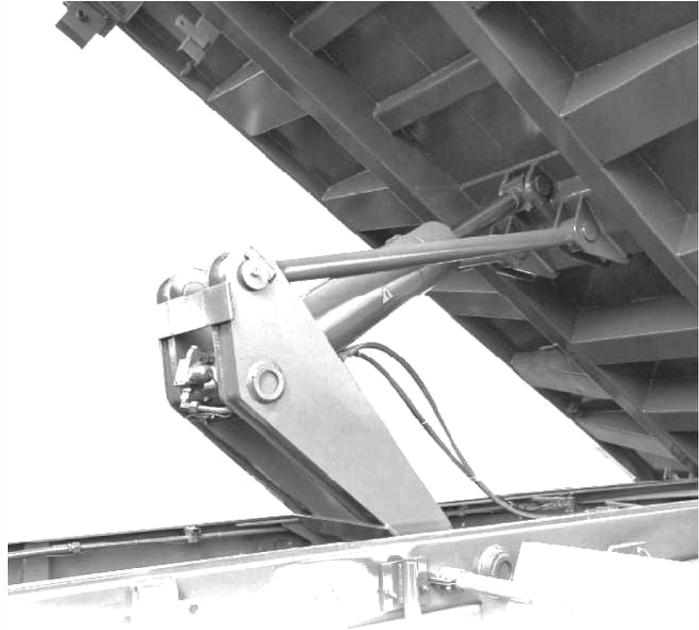


Figure 2.6 – Photographie du dispositif

On considère le mécanisme en équilibre, dans la position de la figure 2.8. L'objectif de l'exercice est de déterminer graphiquement l'effort de poussée du vérin en fonction du poids de la benne.

Six ensembles sont à considérer :

- le châssis 1 du camion, auquel est à associer le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- la benne 2, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) avec le châssis 1 ;
- un levier 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le châssis 1 ;
- une biellette 4, en liaisons pivot respectivement d'axes (C, \vec{z}_1) et (D, \vec{z}_1) avec le levier 3 et la benne 2 ;
- un vérin composé d'un corps 5 et d'une tige 6, en liaisons pivot respectivement d'axes (E, \vec{z}_1) et (F, \vec{z}_1) avec le levier 3 et la benne 2.

Toutes les liaisons sont supposées sans jeu et sans frottement.

La pesanteur n'est prise en compte que pour la benne 2 et sa charge, dont le poids est caractérisé par

$$\vec{R}(p \rightarrow 2) = \vec{P}_2 = -P_2 \vec{y}_1, \text{ avec } P_2 = 50 \text{ kN}$$

1. Réaliser le graphe des liaisons.
2. Identifier et traiter l'équilibre des systèmes soumis l'action de deux glisseurs.
3. Parmi les trois équilibres $\{2\}/1$, $\{3\}/1$ et $\{2, 3, 4, 5, 6\}/1$, deux sont à exploiter. Lesquels ? Justifier.
4. Déterminer l'effort de poussée au niveau du vérin en fonction du poids P_2 de la benne et de sa charge.

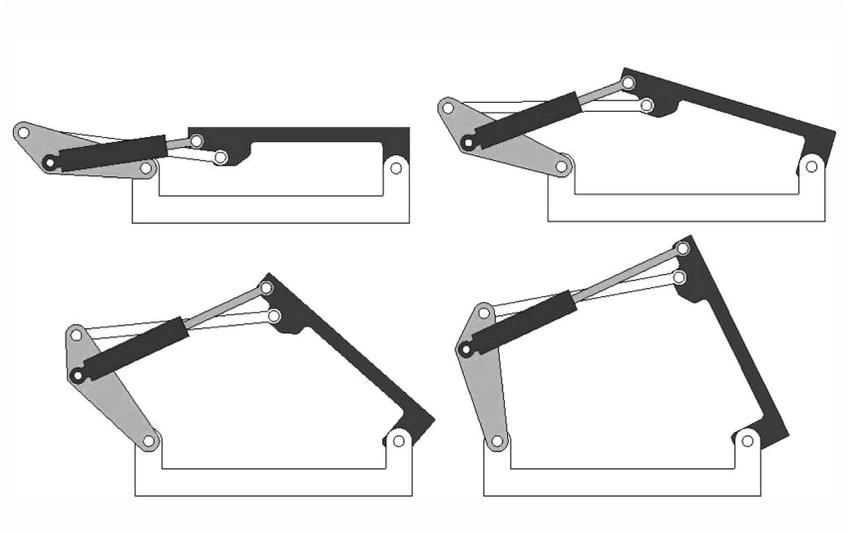


Figure 2.7 – Quatre positions différentes du mécanisme

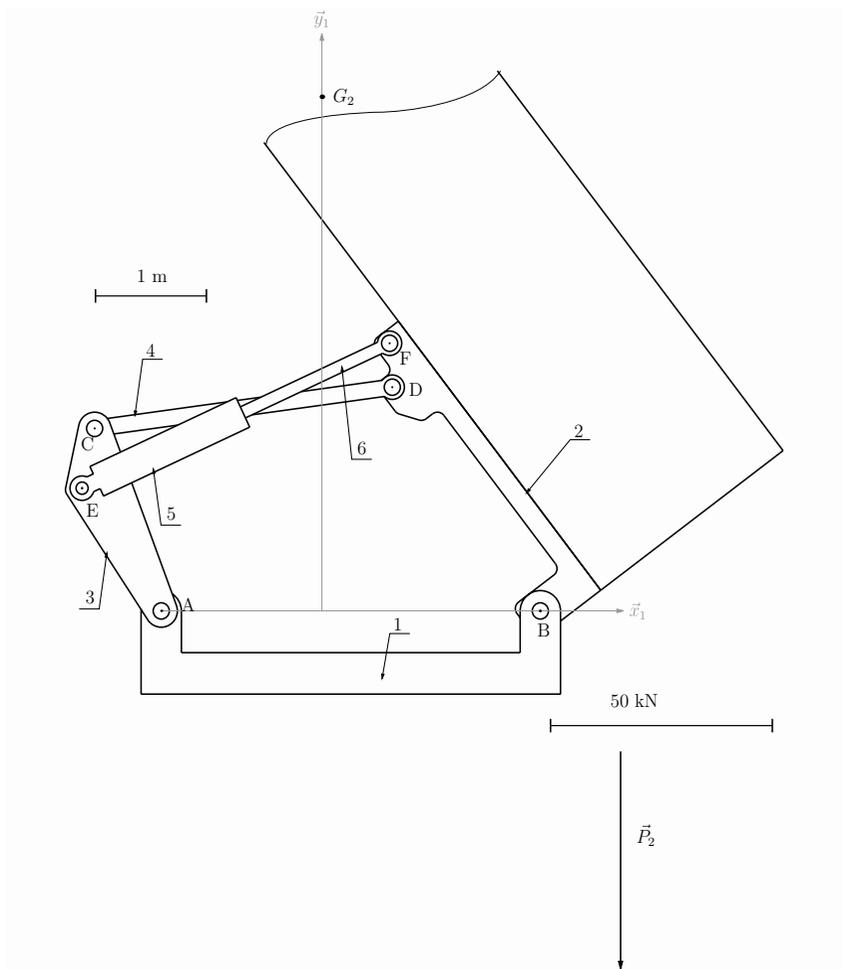


Figure 2.8 – La position d'étude pour les constructions graphiques

2.6 Winch

Un Winch est un mécanisme monté sur le pont d'un navire à voile. Il comporte un tambour sur lequel on peut enrouler un des cordages utilisés pour le réglage des voiles.

Ce tambour est guidé en rotation par rapport au pont du navire et un dispositif à cliquets empêche un des deux sens de rotation.

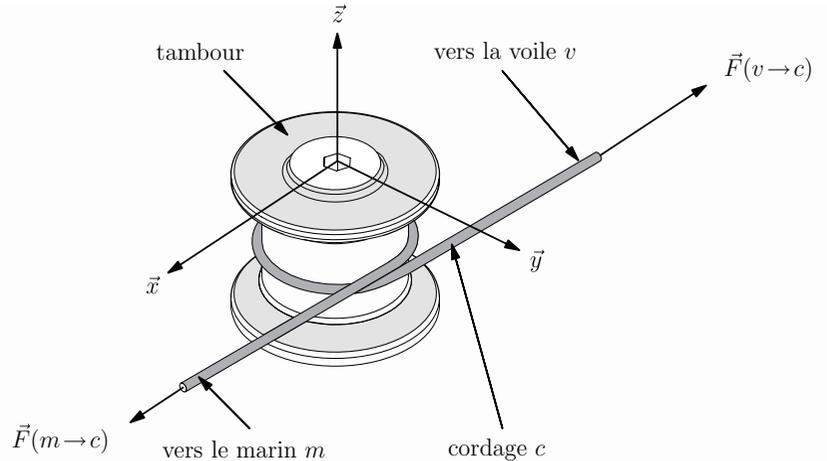


Figure 2.9 – Un tambour de Winch avec un tour de cordage

On suppose le système { tambour, cordage } en équilibre par rapport au pont du voilier que l'on considère assimilable à un repère galiléen pour cette étude. On cherche dans ce cas à établir la relation entre les modules des vecteurs $\vec{F}(v \rightarrow c)$ et $\vec{F}(m \rightarrow c)$ en fonction de l'angle d'enroulement noté α du cordage autour du tambour de rayon R et du coefficient de frottement f pour le couple de matériaux en contact.

Compréhension du phénomène

1. En regardant la figure 2.9 ci-dessus et sachant que $\|\vec{F}(v \rightarrow c)\| \gg \|\vec{F}(m \rightarrow c)\|$, émettre un avis sur le sens de rotation bloqué.
2. Pourquoi la somme $\vec{F}(v \rightarrow c) + \vec{F}(m \rightarrow c)$ n'est-elle pas forcément nulle ?

Évolution de la tension dans le cordage

3. Faire une figure pour poser l'équilibre d'un morceau de cordage de longueur $R \, d\alpha$ enroulé de part et d'autre du point courant P de position repéré par l'angle α .
4. Écrire les deux équations scalaires de résultante suivant la normale et la tangente au contact, sachant que le poids du morceau de cordage est négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

On rappelle la formule de Taylor pour un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction f au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

5. Exploiter la formule de Taylor, les approximations trigonométriques usuelles et la loi de Coulomb à la limite du glissement pour déterminer la loi recherchée.

6. En supposant trois tours de cordage effectués et en prenant un coefficient de frottement $f = 0,2$, déterminer la tension nécessaire à fournir si la voile exerce un effort de 1000 N sur le cordage.

2.7 Agitateur

Un agitateur 2 de dimensions transversales négligeables devant sa longueur $2a$ repose en A et B dans un tube cylindrique 1, d'axe vertical et de diamètre intérieur d :

- le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est attaché au tube ;
- le repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est attaché à la tige 2 ; il est choisi tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$;
- on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $\vec{AG} = a\vec{x}_2$, le point G étant le centre de masse de la tige, et m la valeur de celle-ci.

Soit $\vec{P} = -P\vec{y}_1$ le poids de 2.

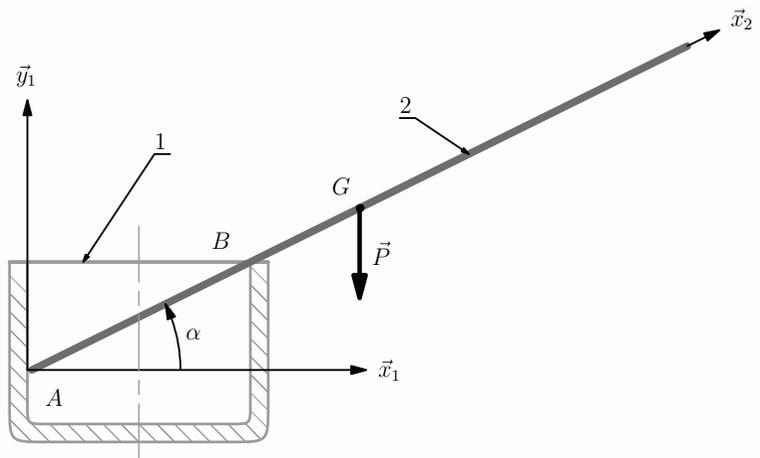


Figure 2.10 – Un agitateur en équilibre ?

Expérimentation

1. Par de simples constatations expérimentales, émettre un avis sur la possibilité d'équilibre stable de la tige 2 par rapport au tube 1, bien entendu sans en toucher le fond.

Modélisation

2. L'équilibre de la tige 2 par rapport au tube 1 est-il possible en l'absence de frottement ?
3. Dans le cas où un équilibre est possible, déterminer la relation liant la demi-longueur a de la tige, le diamètre d du tube et l'angle α .

Le coefficient de frottement d'adhérence correspondant au couple de matériaux est supposé connu et est noté f .

4. Comment se généralise l'étude précédente ?
5. Tracer les vecteurs « vitesse de glissement » éventuels en A et en B à la limite de l'équilibre, puis comparer les résultats théoriques et les constatations expérimentales.

2.8 Robot palettiseur

On considère le robot palettiseur « 4 axes » représenté figure 2.11. Sa structure comprend :

- une embase 1 fixée au sol ;
- un corps 2 en liaison pivot d'axe vertical avec l'embase ;
- un bras 3 en liaison pivot avec le corps ;
- un coude 7 en liaison pivot avec le bras ;
- un avant-bras 4 en liaison avec le bras ;
- un poignet 5 en liaison pivot avec l'avant-bras ;
- une bielle de bras 8 en liaisons sphériques avec le corps et le coude 7 ;
- une bielle d'avant-bras 6 en liaisons sphériques avec le coude et le poignet ;
- un préhenseur, non représenté, en liaison pivot avec le poignet.

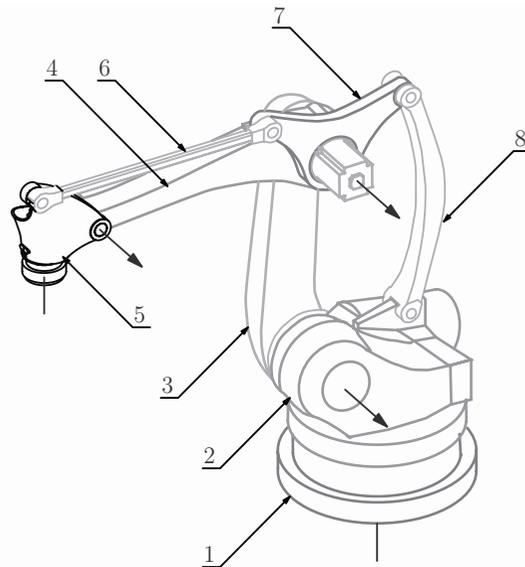


Figure 2.11 – Perspective du robot

En cas d'arrêt d'urgence, des freins doivent immobiliser les 4 liaisons motorisées. L'étude étant limitée aux deux freins des liaisons corps-bras et bras-avant-bras, on se place dans la situation simplifiée suivante :

- les liaisons sont parfaites ;
- le poids des solides est pris en compte pour le bras 3 et l'avant-bras 4, de masses respectives m_3 et m_4 , ainsi que pour l'ensemble {poignet, préhenseur, palette}, de masse m_5 et de centre de gravité G_5 ;
- le freinage de la liaison 2 – 3 est tel que 2 exerce sur 3 une action de freinage modélisée par un couple de moment $M_{f23} \vec{z}_2$;
- le freinage de la liaison 3 – 4 est tel que 3 exerce sur 4 une action de freinage modélisée par un couple de moment $M_{f34} \vec{z}_2$.

La structure est reprise sur le schéma de la figure 2.12. Elle est telle que $ABCD$ et $DFHK$ sont deux parallélogrammes. On pose :

- $AB = DC = HF = KD = a$;
- $AD = BC = HK = FD = b$;

• $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DK}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$, où l'angle α est un invariant du coude 7.

En prenant en compte les deux parallélogrammes, on peut également poser :

• $\overrightarrow{G_5F} = c\vec{x}_2 + h\vec{y}_2 + d\vec{z}_2$, où les longueurs c et h sont des invariants du poignet 5.

Les deux angles θ et β sont pilotés par des moteurs et imposent la posture du robot.

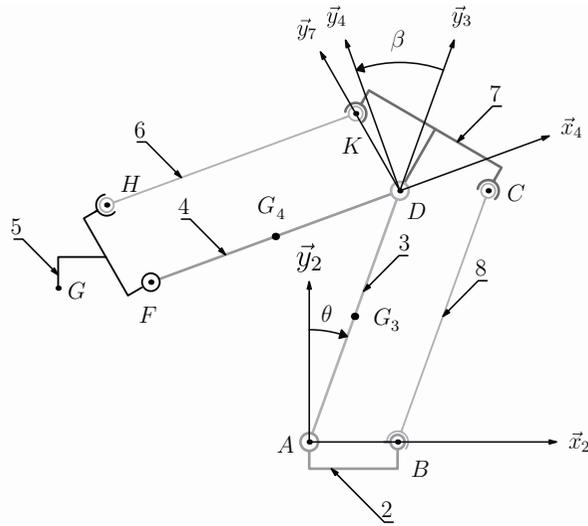


Figure 2.12 – Schéma cinématique plan du robot

Objectif : dans une position du robot caractérisée par θ et β susceptibles d'évoluer dans des intervalles donnés, déterminer les deux couples de freinage qui contribuent au maintien de l'équilibre.

Le corps 2 est assimilable à un repère galiléen et le champ de pesanteur est caractérisé par $\vec{g} = -g\vec{y}_2$.

1. Réaliser un graphe de liaison du système.
2. Étudier l'équilibre de la bielle 6 par rapport à 2.
3. Étudier l'équilibre du poignet 5 par rapport à 2.
4. Étudier l'équilibre de l'ensemble {4,5} par rapport à 2 et déterminer M_{f34} .
5. Établir la stratégie de choix des équilibres à effectuer et des théorèmes à appliquer pour aboutir à la détermination du couple de freinage M_{f23} .
6. Mettre en œuvre la stratégie pour déterminer M_{f23} .

2.9 Coinceur à cames

Cet équipement, photographié figure 2.13, permet à un alpiniste de placer un point d'ancrage dans une fissure pour laquelle il est adapté.

Il est principalement constitué d'un axe sur lequel sont articulées des cames, d'une tige souple attachée à l'axe, d'une sangle qui termine la tige, de ressorts de torsion de câbles et d'une gâchette. Les ressorts tendent à faire tourner les cames par rapport à l'axe dans le sens de l'écartement des profils des cames, ce qui permet la mise en contact avec les parois de la fissure. La gâchette et les câbles, au contraire, permettent de rendre le coin-ceur moins encombrant et rendent ainsi possible la mise en place dans la fissure. La figure 2.14 présentent trois positions différentes des cames faisant varier l'écartement.



Figure 2.13 – Une photographie d'un coin à cames



Figure 2.14 – Trois positions différentes des cames

Le système est autobloquant : si les conditions de géométrie de la fissure, de frottement et de direction de la charge sont vérifiées, le coin reste en adhérence avec la paroi indépendamment de la valeur de la charge suspendue à la sangle. Les quatre cames sont à rotation indépendantes et permettent au coin de fonctionner avec stabilité pour des parois non strictement parallèles. Chaque modèle est conçu pour une charge nominale donnée ainsi qu'un intervalle pour la taille de la fissure.

Le modèle étudié est caractérisé pour une charge nominale de 14 kN et un intervalle pour la taille de la fissure de 43 mm à 66 mm.

Hypothèses pour l'étude

Le parallélisme entre les deux faces de la fissure, la position dans laquelle le coin est mis en place, la direction de la charge par rapport à la fissure permettent de faire une modélisation plane du mécanisme, telle que proposée figure 2.15.

On considère donc une charge appliquée à l'ensemble 2 constitué de l'axe et de la sangle modélisée par un glisseur de résultante $-P\vec{y}_1$ de 14 kN de module, parallèle à la fissure et dont l'axe central passe par le point O.

Les cames 3 et 4 sont supposées en contact ponctuel avec la paroi 1, respectivement aux points A et B, et en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec l'axe 2.

La masse totale du coinqueur est de l'ordre de 150 g ; on négligera donc le poids des pièces ainsi que les actions de rappel des ressorts devant la charge P appliquée.

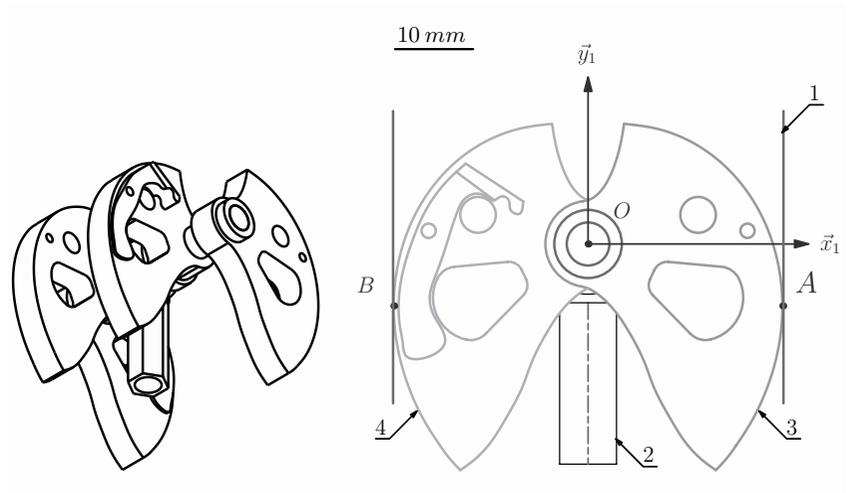


Figure 2.15 – Modélisation géométrique adoptée pour l'étude

Objectif de l'étude

Déterminer dans la position de la figure 2.15 l'angle de frottement minimum au contact paroi-came pour assurer le coincement.

1. En supposant l'équilibre du coinqueur réalisé, déterminer l'action de la paroi 1 sur la came 3 en fonction de la charge P appliquée.
2. En déduire l'angle minimum de frottement au contact paroi-came pour assurer le coincement.
3. Proposer une forme de profil qui conserve la condition géométrique précédente.

Du mal à démarrer ?

2.1 1. Exprimer le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$.

2. Quelles sont les unités des différents termes exprimés dans le sujet ?

3. Il faut sommer les quantités élémentaires.

2.2 1. Exprimer le vecteur \vec{CP} en fonction de \vec{u}_2 , sans projeter dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

2. Exprimer le plus simplement possible le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$, puis utiliser les figures de changement de bases.

5. Seule une liste des actions mécaniques est utile, sous la forme $k \rightarrow 2$.

6. Où est le centre de masse de l'axe tournant du malaxeur ?

2.3 2. Un raisonnement qualitatif à partir des mouvements imaginés est suffisant.

3. Compter les nombres d'équations et d'inconnues, puis chercher à éviter le maximum d'inconnues de liaison. (On peut se ramener à un système de trois équations à quatre inconnues).

4. Poser les torseurs d'actions mécaniques à considérer.

2.4 1. Tracer le graphe des liaisons.

2. La résolution nécessite l'exploitation de trois équilibres. Chercher à éviter au maximum les inconnues de liaisons, en identifiant en premier les ensembles soumis à l'action de deux glisseurs.

4. Commencer par faire un schéma du modèle de barrière à comparer.

2.5 2. Exploiter le graphe des liaisons.

3. Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures et dénombrer les inconnues.

2.6 2. S'intéresser à l'équilibre du tambour et du morceau de cordage représenté.

3. Soigner particulièrement les angles à tracer sur la figure.

4. Trois glisseurs sont à mettre en place.

2.7 1. Il n'y a rien à écrire avant d'avoir fait l'expérience avec un verre et le manche d'une cuillère par exemple, ou un bocal et le manche à section circulaire d'une cuillère en bois.

2. Commencer par faire un graphe des contacts, ces derniers nécessitant une analyse attentive.

4. Une approche graphique est profitable.

2.8 1. Sept ensembles sont à nommer. Un brouillon peut être utile pour les premières esquisses. Procéder de manière méthodique pour ne pas oublier de liaisons.

5. S'inspirer des quatre premières questions.

2.9 1. La description est moins précise qu'à l'ordinaire. Il est nécessaire de faire le tri dans l'ensemble des informations pour proposer un graphe des liaisons et contacts avec les quatre pièces principales concernées par l'étude.

2. Que racontent les lois du frottement ?

3. Faire des figures est indispensable !

Dans un repère lié à la paroi, où se déplace le point de contact lorsque les cames s'écartent ?

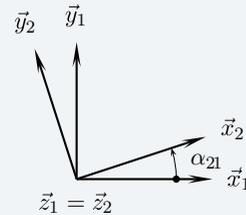
À partir de cette constatation, changer de référentiel pour proposer une équation différentielle dans un repère lié à la came.

Corrigés des exercices

2.1 Frottement fluide sur un malaxeur 1

1. Le mouvement 2/1 est caractérisé par le torseur cinématique d'une liaison pivot

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{21} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$



Par changement de point sur ce mouvement, on écrit pour le point courant P

$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} \vec{z}_2 \wedge x \vec{x}_2$$

On obtient ainsi

$$\vec{V}(P, 2/1) = x \omega_{21} \vec{y}_2$$

2. On exploite le résultat précédent pour l'expression de la force élémentaire au point P

$$d\vec{F}(f \rightarrow 2) = -\mu x \omega_{21} dx \vec{y}_2$$

3. On caractérise le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$ par ses éléments de réduction au point A .

• Concernant la résultante

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \int_0^L d\vec{F}(f \rightarrow 2)$$

Après substitution et arrangement, l'expression se détaille ainsi

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = -\mu \omega_{21} \int_0^L x dx \vec{y}_2$$

On obtient finalement

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = -\frac{1}{2} \mu L^2 \omega_{21} \vec{y}_2$$

• Concernant le vecteur moment au point A

$$\vec{M}(A, f \rightarrow 2) = \int_0^L \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}(f \rightarrow 2)$$

Après substitution et arrangement, l'expression se détaille alors

$$\vec{M}(A, f \rightarrow 2) = -\mu \omega_{21} \int_0^L x^2 dx \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_2$$

Et on obtient après calculs

$$\vec{M}(A, f \rightarrow 2) = -\frac{1}{3} \mu L^3 \omega_{21} \vec{z}_2$$

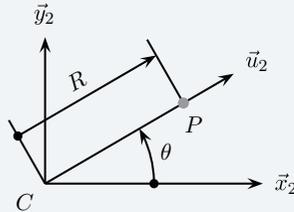
On constate que le produit scalaire $\vec{R}(f \rightarrow 2) \cdot \vec{M}(A, f \rightarrow 2)$ est nul. Cela signifie que le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$ est un glisseur.

Soit $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, on peut alors proposer

$$\mathcal{F}(f \rightarrow 2) =_C \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu L^2 \omega_{21} \vec{y}_2 \\ 0 \end{cases}$$

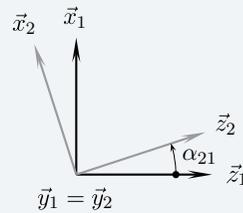
2.2 Frottement fluide sur un malaxeur 2

1. À partir de la figure proposée, on pose $\vec{CP} = R\vec{u}_2$, avec le rayon R constant et l'angle θ variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



2. La liaison entre l'axe 2 et le bâti 1 est une liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_1)

$$\mathcal{V}(2/1) =_A \begin{cases} \omega_{21} \vec{y}_1 \\ 0 \end{cases}$$



Par changement de point sur ce mouvement, on écrit pour le point courant P

$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} \vec{y}_2 \wedge R \vec{u}_2$$

La figure de la question précédente permet de calculer le produit vectoriel $\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2$ et on obtient

$$\vec{V}(P, 2/1) = -R \cos \theta \omega_{21} \vec{z}_2$$

3. On exploite le résultat précédent pour l'expression de la force élémentaire au point P du fluide f sur l'axe 2

$$\begin{aligned} d\vec{F}(f \rightarrow 2) &= \vec{q}(P) ds \\ &= \vec{q}(P) R d\theta \\ &= +\mu R^2 \cos \theta d\theta \omega_{21} \vec{z}_2 \end{aligned}$$

4. On caractérise le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$ par ses éléments de réduction au point C .

• Concernant la résultante

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \int d\vec{F}(f \rightarrow 2)$$

Après substitution et arrangement, l'expression se détaille ainsi

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \mu R^2 \omega_{21} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \vec{z}_2$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \vec{R}(f \rightarrow 2) &= \mu R^2 \omega_{21} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{z}_2 \\ &= \mu R^2 \omega_{21} \vec{z}_2 \end{aligned}$$

- Concernant le vecteur moment au point C

$$\vec{M}(C, f \rightarrow 2) = \int \vec{CP} \wedge d\vec{F}(f \rightarrow 2) \quad (1)$$

Comme les vecteurs \vec{CP} et $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$ sont respectivement suivant \vec{u}_2 et \vec{z}_2 , on détaille le produit vectoriel $\vec{u}_2 \wedge \vec{z}_2$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 \wedge \vec{z}_2 &= (\cos \theta \vec{x}_2 + \sin \theta \vec{y}_2) \wedge \vec{z}_2 \\ &= -\cos \theta \vec{y}_2 + \sin \theta \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Après substitution et arrangement, l'expression (1) se détaille ainsi

$$\vec{M}(C, f \rightarrow 2) = \mu R^3 \omega_{21} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos \theta d\theta \vec{x}_2 - \cos^2 \theta d\theta \vec{y}_2) \quad (2)$$

Deux intégrales sont alors à calculer :

– concernant la première

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

– concernant la seconde

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

On obtient alors après substitution dans l'équation (2)

$$\vec{M}(C, f \rightarrow 2) = \mu R^3 \omega_{21} \left(\frac{1}{2} \vec{x}_2 - \frac{\pi}{4} \vec{y}_2 \right)$$

On constate que le produit scalaire $\vec{R}(f \rightarrow 2) \cdot \vec{M}(C, f \rightarrow 2)$ est nul. Cela signifie que le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$ est un glisseur.

5. L'axe du malaxeur 2 est soumis aux quatre actions mécaniques suivantes :

- la pesanteur $p \rightarrow 2$;
- le bâti $1 \rightarrow 2$;
- le moteur $m \rightarrow 2$;
- le fluide $f \rightarrow 2$.

6. Issue du théorème de l'équilibre appliqué à la pale filaire 2, l'équation de moment au point C scalaire \vec{y}_1 évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot.

En régime permanent, la vitesse de rotation ω_{21} est constante et on admet la pertinence de l'équation citée

$$\vec{M}(C, \bar{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_1 = 0$$

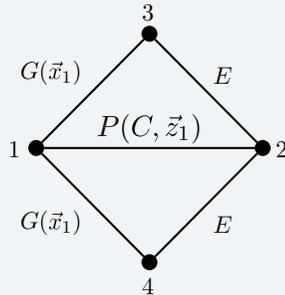
Seules les actions mécaniques issues du moteur et du fluide donnent des quantités non nulles et on obtient l'expression du couple moteur en régime permanent

$$C_m = \mu \frac{\pi}{4} R^3 \omega_{21}$$

7. Le centre de masse G de la pale filaire 2 n'est pas sur l'axe de rotation (C, \vec{y}_1) , les quantités d'accélération ne sont donc pas nulles en régime permanent et le théorème de l'équilibre n'est pas applicable pour déterminer les actions mécaniques transmissibles par la liaison pivot.

2.3 Étau hydraulique auto-centrant

1. Le mécanisme étudié comporte deux chaînes fermées de quatre solides.



$P (dte)$	Pivot d'axe (dte)
$G (vec)$	glissière de direction (vec)
E	engrènement

2. En imaginant les mouvements induits par la rotation du pignon 2 par rapport au bâti, on constate qu'en phase de serrage, les mors 3 et 4 se rapprochent, ce qui entraîne une rotation positive du pignon 2 par rapport au bâti 1.

Une étude cinématique est nécessaire pour apporter la preuve à cette dernière affirmation :

- sur la chaîne fermée 1 – 3 – 2 – 1

– on pose les torseurs cinématiques des deux liaisons pivot et glissière

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{C}{\begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{V}(3/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{31} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

– puis on exploite le roulement sans glissement au point A dans le mouvement 2/3 et la composition des mouvements

$$\vec{V}(A, 2/3) = \vec{0} = \vec{V}(A, 2/1) - \vec{V}(A, 3/1)$$

– un changement de point sur le mouvement 2/1 permet d'obtenir une première relation

$$V_{31} = -R\omega_{21}$$

- sur la chaîne fermée 1 – 4 – 2 – 1

– on adopte une démarche similaire pour arriver à la relation

$$V_{41} = +R\omega_{21}$$

- une composition des mouvements sur la chaîne ouverte 4 – 1 – 3 permet de caractériser le mouvement 3/4

$$\mathcal{V}(3/4) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{34} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}, \text{ avec } V_{34} = V_{31} - V_{41} = -2R\omega_{21}$$

- en phase de serrage, les deux mors se rapprochent : la translation du mors 3 par rapport au mors 4 est alors négative, suivant $-\vec{x}_1$, ce qui correspond à une rotation positive du pignon 2 par rapport au bâti 1.

3. Trois équilibres sont à étudier sur ce mécanisme à quatre solides. On a donc à traiter un système de 18 équations pour 17 inconnues scalaires de liaison (5 par glissière, 5 pour la pivot et 1 par engrènement), auxquelles il faut ajouter les 2 inconnues scalaires F et X .

Pour trouver la relation $X = f(N)$, il est judicieux d'essayer d'éviter les quinze inconnues scalaires des liaisons pivot et glissière, et ainsi extraire du système précédent un système de 3 équations à 4 inconnues :

- Équilibre de 4 par rapport à 1 : équation de résultante scalaire \vec{x}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison glissière.
- Équilibre de 3 par rapport à 1 : équation de résultante scalaire \vec{x}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison glissière.
- Équilibre de 2 par rapport à 1 : équation de moment au point C scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot.

La résolution donne ainsi :

Équilibre de 4 par rapport à 1

L'inventaire des actions mécaniques extérieures permet d'en retenir quatre :

- le vérin $v \rightarrow 4$;
- la pièce $P \rightarrow 4$;
- le bâti $1 \rightarrow 4$;
- le pignon $2 \rightarrow 4$, avec $\mathcal{F}(2 \rightarrow 4) = -\mathcal{F}(4 \rightarrow 2)$.

L'équation de résultante scalaire \vec{x}_1 donne

$$X - F - F_{42} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

Équilibre de 3 par rapport à 1

L'inventaire des actions mécaniques extérieures permet d'en retenir trois :

- la pièce $P \rightarrow 3$;
- le bâti $1 \rightarrow 3$;
- le pignon $2 \rightarrow 3$.

L'équation de résultante scalaire \vec{x}_1 donne

$$F - F_{23} \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Équilibre de 2 par rapport à 1

L'inventaire des actions mécaniques extérieures permet d'en retenir trois :

- le coulisseau $3 \rightarrow 2$, avec $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(2 \rightarrow 3)$;

$$\begin{aligned} \vec{M}(C, 3 \rightarrow 2) &= -F_{23}(-\cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1) \wedge -R \vec{y}_1 \\ &= -R F_{23} \cos \alpha \vec{z}_1 \end{aligned}$$

- le coulisseau $4 \rightarrow 2$;
- le bâti $1 \rightarrow 2$;

L'équation de moment au point C scalaire \vec{z}_1 donne

$$-R F_{23} \cos \alpha + R F_{42} \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Le rayon R n'est pas nul, et la quantité $\cos \alpha$ non plus. On déduit donc des trois équations 1, 2 et 3 la relation recherchée

$$X = 2F$$

4. Les actions mécaniques au niveau des engrènements ont été déterminées à la question précédente

$$F_{23} = F_{42} = \frac{F}{\cos \alpha}$$

Pour déterminer les seules inconnues de liaisons du problème plan, on pose comme torseurs

- pour la liaison pivot

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) =_C \begin{Bmatrix} X_{12} \vec{x}_1 + Y_{12} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- pour les deux liaisons glissière

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 3) =_C \begin{Bmatrix} Y_{13} \vec{y}_1 \\ N_{13} \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(1 \rightarrow 4) =_C \begin{Bmatrix} Y_{14} \vec{y}_1 \\ N_{14} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

Il est nécessaire de reprendre les trois équilibres précédents et d'exploiter l'ensemble des équations.

Équilibre de 4 par rapport à 1

L'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 donne

$$Y_{14} - F_{42} \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

L'équation de moment au point C scalaire \vec{z}_1 donne

$$+hF + N_{14} - RF_{42} \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

On déduit de ces deux dernières équations

$$Y_{14} = F \tan \alpha \quad N_{14} = (R - h)F$$

Équilibre de 3 par rapport à 1

L'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 donne

$$Y_{13} + F_{23} \sin \alpha = 0 \quad (6)$$

L'équation de moment au point C scalaire \vec{z}_1 donne

$$-hF + N_{13} + RF_{23} \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

On déduit de ces deux dernières équations

$$Y_{13} = -F \tan \alpha \quad N_{13} = (h - R)F$$

Équilibre de 2 par rapport à 1

L'équation de résultante scalaire \vec{x}_1 donne

$$F_{23} \cos \alpha + F_{42} \cos \alpha + X_{12} = 0 \quad (8)$$

L'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 donne

$$-F_{23} \sin \alpha + F_{42} \sin \alpha + Y_{12} = 0 \quad (9)$$

On déduit de ces deux dernières équations

$$X_{12} = -2F \quad Y_{12} = 0$$

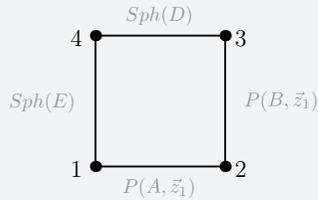
5. Applications numériques :

$i \rightarrow k$	X_{ik} [N]	Y_{ik} [N]	N_{ik} [Nm]
1 → 2	$2,0 \cdot 10^4$	0	0
1 → 3	0	$3,6 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^2$
1 → 4	0	$-3,6 \cdot 10^3$	$-1,0 \cdot 10^2$
2 → 3	$-9,4 \cdot 10^3$	$3,4 \cdot 10^3$	0
4 → 2	$9,4 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^3$	0

2.4 Barrière articulée

1. On trace le graphe des liaisons du mécanisme, en notant :

- $P(Dte)$ une liaison pivot d'axe la droite Dte ;
- $Sph(Pt)$ une liaison sphérique de centre le point Pt .



On compte alors 16 inconnues statiques de liaison non recherchées, auxquelles il faut ajouter l'inconnue C_f et les poids du bras et de l'avant-bras.

2. Trois équilibres sont à exploiter ; sans trop réfléchir, on a alors à traiter un système de 18 équations à 16 inconnues de liaison. Pour une résolution à la main, il est judicieux de repérer la biellette 4 en équilibre sous l'action de deux glisseurs, et aussi de chercher à éviter toutes les inconnues des liaisons pivot :

- équilibre de 4/1, avec l'équation de moment au point D ou E ;
- équilibre de 3/1, avec l'équation de moment au point B scalaire \vec{z}_1 ;
- équilibre de l'ensemble $\{2,3\}/1$, avec l'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_1 .

3. On met en œuvre la stratégie précédente.

Équilibre de la biellette 4 par rapport à 1

On dénombre deux actions mécaniques extérieures :

- l'action du bâti $1 \rightarrow 4$;
- l'action de l'avant-bras $3 \rightarrow 4$.

On pose les deux torseurs associés aux liaisons sphérique

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) =_E \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow 4) =_D \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 4) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

L'équation de moment au point E permet de proposer

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = F_{34} \vec{x}_2$$

Équilibre de l'avant-bras 3 par rapport à 1

On dénombre trois actions mécaniques extérieures :

- la pesanteur $p \rightarrow 3$;
- la biellette $4 \rightarrow 3$;
- le bras $2 \rightarrow 3$.

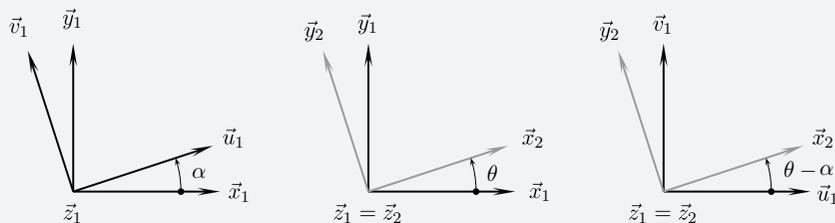
On pose les torseurs associés

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) =_{G_3} \begin{Bmatrix} -mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(4 \rightarrow 3) =_D \begin{Bmatrix} -F_{34} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(2 \rightarrow 3) =_B \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(B, 2 \rightarrow 3) \perp \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

L'équation de moment au point B scalaire \vec{z}_1 évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot

$$\left(-F_{34} \vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{DB} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left(-mg \vec{y}_1 \wedge \overrightarrow{G_3 B} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (1)$$

Les figures de changement de base sont utiles pour effectuer les produits vectoriels



On effectue le produit vectoriel $\vec{x}_2 \wedge \vec{v}_1 = \cos(\theta - \alpha)\vec{z}_1$ et on détaille l'équation (1) pour trouver

$$F_{34} = \frac{1}{2} \frac{L}{a \cos(\theta - \alpha)} mg$$

Équilibre de l'ensemble {2, 3} par rapport à 1

On dénombre cinq actions mécaniques extérieures :

- le bâti $1p \rightarrow 2$ par la liaison pivot ;
- le bâti $1f \rightarrow 2$ par le frein ;
- la pesanteur $p \rightarrow 2$;
- la pesanteur $p \rightarrow 3$;
- la bielle 4 $\rightarrow 3$.

On pose les trois torseurs manquants

$$\mathcal{F}(1p \rightarrow 2) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1p \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, 1p \rightarrow 2) \perp \vec{z}_1 \end{array} \right.} \quad \mathcal{F}(1f \rightarrow 2) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_f \vec{z}_1 \end{array} \right. \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 2) = \underset{G_2}{\left\{ \begin{array}{l} -mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

L'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_1 évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot

$$\left(\vec{M}(A, 1f \rightarrow 2) - mg \vec{y}_1 \wedge \vec{G}_2 \vec{A} - mg \vec{y}_1 \wedge \vec{G}_3 \vec{A} - F_{34} \vec{x}_2 \wedge \vec{D} \vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

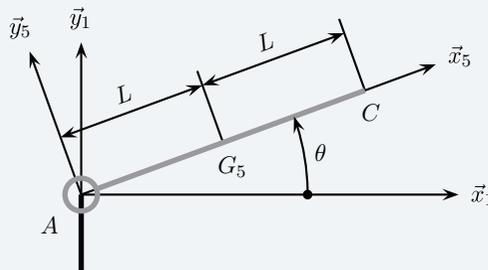
On décompose $\vec{G}_3 \vec{A} = \vec{G}_3 \vec{B} + \vec{B} \vec{A}$ et $\vec{D} \vec{A} = \vec{D} \vec{B} + \vec{B} \vec{A}$, puis on utilise l'équation (1) pour réécrire l'expression précédente

$$C_f - \left(mg \vec{y}_1 \wedge \vec{G}_2 \vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left(-mg \vec{y}_1 \wedge \vec{B} \vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1 - \underbrace{\left(F_{34} \vec{x}_2 \wedge \vec{B} \vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1}_{=0} = 0$$

On calcule le produit vectoriel $\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 = \cos \theta \vec{z}_1$ et on trouve finalement

$$C_f = \frac{3}{2} mgL \cos \theta$$

4. On trace le schéma cinématique d'une barrière rectiligne 5, non articulée, de longueur $2L$ et de masse $2m$



Cette barrière est en équilibre sous l'action :

- de la pesanteur $p \rightarrow 5$;
- du bâti par la liaison pivot $1p \rightarrow 5$;
- du bâti par l'intermédiaire du frein $1f \rightarrow 5$.

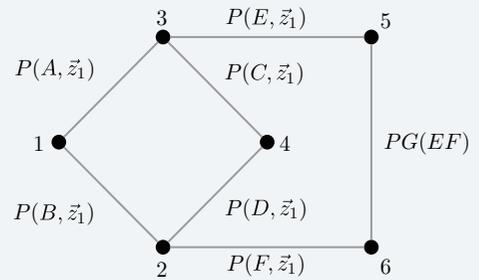
L'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_1 évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot et on obtient

$$C_f = 2mgL \cos \theta$$

La barrière articulée limite l'encombrement du mécanisme en position ouverte et minore le couple de maintien de 25 %.

2.5 Mécanisme à compas pour benne

1. Ce mécanisme comporte six solides et deux chaînes fermées. En utilisant $P(dte)$ et $PG(dte)$ comme abréviations respectives de « pivot d'axe *une droite* » et « pivot glissant d'axe *une droite* », on peut proposer comme graphe des liaisons



2. Les arcs matérialisent les liaisons et les actions mécaniques correspondantes. Il faut ajouter à cet inventaire les actions mécaniques autres, à savoir dans cet exercice :

- la pesanteur $p \rightarrow 2$;
- les actions mécaniques du fluide $f \rightarrow 5$ et $f \rightarrow 6$.

En modélisation plane, il est souvent utile d'identifier en premier tous les ensembles soumis à l'action mécanique de deux glisseurs. Cela revient ici à chercher sur le graphe des liaisons tous les ensembles entre deux arcs matérialisant des pivots. Deux ensembles conviennent :

- équilibre de $4/1$, soumis aux seules actions mécaniques $2 \rightarrow 4$ et $3 \rightarrow 4$;

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 4) =_D \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 4) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow 4) =_C \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 4) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ces deux glisseurs ont même axe central la droite (CD) et leurs résultantes sont opposées. L'exploitation de cet équilibre laisse subsister une inconnue scalaire que l'on retrouve sur les deux torseurs $\mathcal{F}(2 \rightarrow 4)$ et $\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)$.

- équilibre de $\{5,6\}/1$, soumis aux seules actions mécaniques $3 \rightarrow 5$ et $2 \rightarrow 6$

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 5) =_E \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 5) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(2 \rightarrow 6) =_F \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 6) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ces deux glisseurs ont même axe central la droite (EF) et leurs résultantes sont opposées.

Les autres ensembles ne comportant que deux arcs sortants ne conviennent pas :

- tige 6 et corps de vérin 5 sont soumis chacun à trois actions mécaniques ;
- l'ensemble $\{2,3,4,5,6\}$ est soumis à l'action mécanique de trois glisseurs ;
- l'équilibre du bâti par rapport à lui-même $1/1$ n'a aucun sens !

3. Trois équilibres sont proposés.

Équilibre de 2 par rapport à 1

L'inventaire des actions mécaniques extérieures permet d'en retenir quatre :

- le bâti $1 \rightarrow 2$, avec 2 inconnues ;
- la biellette $4 \rightarrow 2$, avec 1 inconnue ;
- la tige de vérin $6 \rightarrow 2$, avec 1 inconnue ;
- la pesanteur $p \rightarrow 2$, entièrement connue.

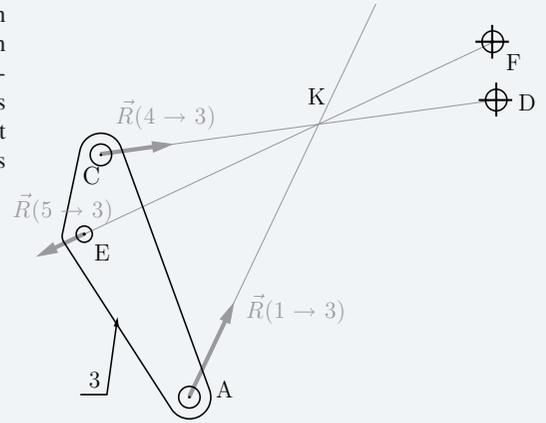
Que ce soit de manière analytique ou graphique, on dénombre quatre inconnues pour trois équations, on ne sait donc *a priori* pas résoudre !

Équilibre de 3 par rapport à 1

L'inventaire des actions mécaniques extérieures permet d'en retenir trois :

- le bâti $1 \rightarrow 3$, avec 2 inconnues ;
- la biellette $4 \rightarrow 3$, avec 1 inconnue ;
- la tige de vérin $5 \rightarrow 3$, avec 1 inconnue.

On dénombre quatre inconnues pour trois équations, on ne sait donc pas résoudre entièrement. Mais on sait qu'un solide en équilibre sous l'action de trois glisseurs impliquent les trois axes centraux correspondants parallèles ou concourants. On détermine ainsi la position du point K , point d'intersection des axes centraux des glisseurs $\mathcal{F}(4 \rightarrow 3)$ et $\mathcal{F}(5 \rightarrow 3)$.



Équilibre de {2, 3, 4, 5, 6} par rapport à 1

L'inventaire des actions mécaniques extérieures permet d'en retenir trois :

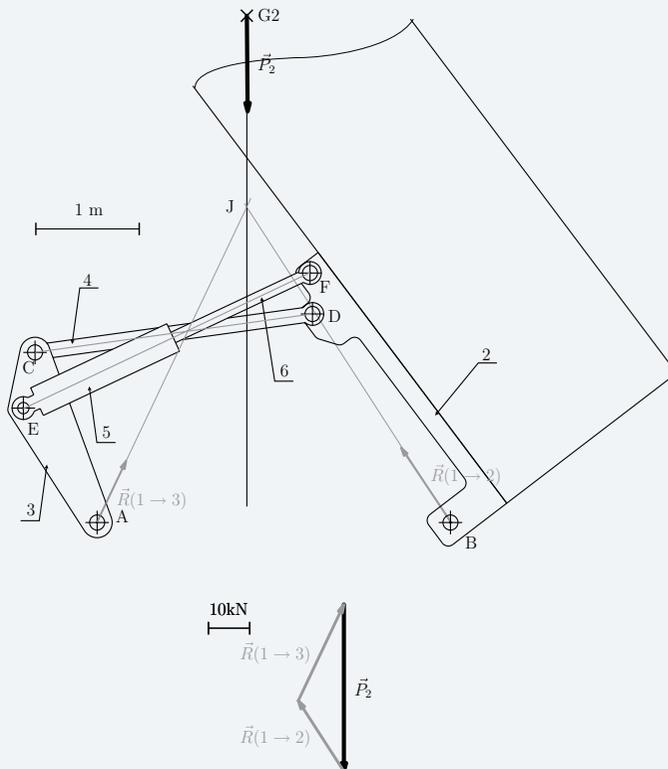
- le bâti $1 \rightarrow 2$, avec 2 inconnues ;
- le bâti $1 \rightarrow 3$, avec 1 inconnue ;
- la pesanteur $p \rightarrow 2$, entièrement connue.

On dénombre trois inconnues pour trois équations, on sait *a priori* résoudre entièrement. Cet ensemble est en équilibre sous l'action de trois glisseurs dont deux des trois axes centraux se coupent au point J . On détermine ainsi la direction de l'axe central du glisseur $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$.

L'équation de résultante donne ensuite

$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) + \vec{R}(1 \rightarrow 3) + \vec{R}(p \rightarrow 2) = \vec{0}$$

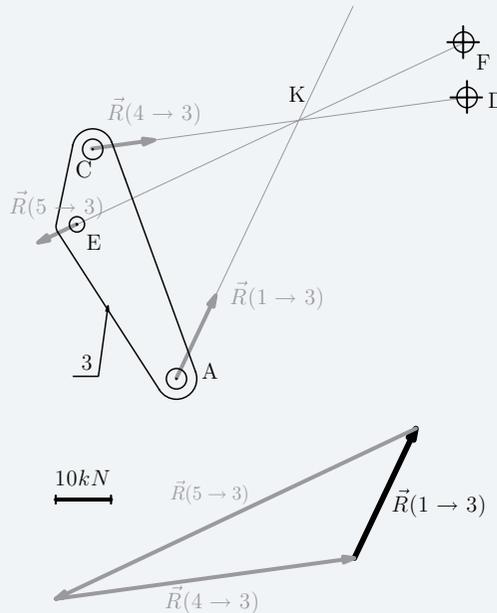
Le dynamique peut être alors tracé : il conduit à la connaissance de $\vec{R}(1 \rightarrow 3)$.



Une fois $\vec{R}(1 \rightarrow 3)$ déterminé, on revient à l'équilibre de 3 pour exploiter l'équation de résultante

$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) + \vec{R}(4 \rightarrow 3) + \vec{R}(5 \rightarrow 3) = \vec{0}$$

Le dynamique peut maintenant être tracé : il conduit à la connaissance de $\vec{R}(5 \rightarrow 3)$. On mesure $\|\vec{R}(5 \rightarrow 3)\| = 72 \text{ kN}$, valeur qui correspond à l'effort de poussée recherchée.



2.6 Winch

1. L'effort de traction de la voile tend à faire tourner le tambour par rapport au pont du voilier dans le sens positif. C'est ce sens de rotation qui est bloqué par le dispositif à cliquets.

2. On s'intéresse à l'équilibre du tambour et du morceau de cordage représenté sur la figure 1. Cet ensemble est soumis à :

- l'action du marin sur le cordage $m \rightarrow c$;
- l'action de la voile sur le cordage $v \rightarrow c$;
- l'action du pont sur le tambour $p \rightarrow t$.

À l'équilibre, on a ainsi

$$\mathcal{F}(m \rightarrow c) + \mathcal{F}(v \rightarrow c) + \mathcal{F}(p \rightarrow t) = \mathcal{O}$$

C'est l'équation de résultante de cette dernière équation qui permet de répondre à la question posée.

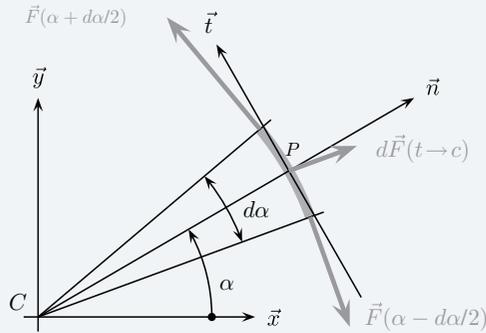
La somme $\vec{F}(v \rightarrow c) + \vec{F}(m \rightarrow c)$ représente l'opposé de la résultante des actions du pont sur le tambour. Ce dispositif est prévu pour que le pont encaisse l'essentiel de l'action mécanique de la voile sur le cordage.

3. On s'intéresse à l'équilibre d'un petit morceau de cordage et on se place dans le repère local (P, \vec{n}, \vec{t}) . Le poids de ce bout de cordage est négligé devant les tensions transmises et on pose :

- une tension $\vec{F}(\alpha)$ dans le cordage à la position angulaire α , en posant cette tension *a priori* croissante avec α ;
- l'action élémentaire du tambour sur le bout de cordage.

$$d\vec{F}(t \rightarrow c) = N\vec{n} - T\vec{t}$$

la composante tangentielle T de $d\vec{F}(t \rightarrow c)$ est posée suivant $-\vec{t}$, car avec une tension supposée croissante avec α , la vitesse de glissement $\vec{V}(P, c/t)$ est constatée suivant $+\vec{t}$.



4. Ce morceau de cordage est en équilibre sous l'action de trois glisseurs dont les axes centraux sont concourants au point P . On exploite alors l'équation de résultante pour écrire :

- l'équation de résultante suivant \vec{n} ;

$$N - F\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) \sin \frac{d\alpha}{2} - F\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) \sin \frac{d\alpha}{2} = 0 \quad (1)$$

- l'équation de résultante suivant \vec{t} .

$$-T - F\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) \cos \frac{d\alpha}{2} + F\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0 \quad (2)$$

5. Plusieurs manipulations sont alors indispensables :

- on exploite la formule de Taylor pour écrire, au premier ordre

$$F\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) \approx F(\alpha) + F'(\alpha) \frac{d\alpha}{2}$$

$$F\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) \approx F(\alpha) - F'(\alpha) \frac{d\alpha}{2}$$

- pour un angle u très proche de 0, on a comme approximations trigonométriques, toujours au premier ordre

$$\cos u \approx 1$$

$$\sin u \approx u$$

- on se place à la limite du glissement pour écrire

$$\left| \frac{T}{N} \right| = f$$

Les équations (1) et (2) se transforment et on écrit

$$N = d\alpha F(\alpha) \quad (3)$$

$$fN = d\alpha F'(\alpha) \quad (4)$$

On effectue le rapport membre à membre des deux dernières équations (4) et (3) pour proposer comme équation différentielle

$$\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} = f$$

Cette équation s'intègre entre 0 et α par

$$[\ln(F(\alpha))]_0^\alpha = f [\alpha]_0^\alpha$$

On prend comme condition initiale la tension F_m exercée par le marin pour $\alpha = 0$ et F_v celle exercée par la voile pour la valeur α . On obtient alors

$$\ln(F_v) - \ln(F_m) = \ln\left(\frac{F_v}{F_m}\right) = f\alpha$$

On en déduit finalement l'expression à retenir

$$F_v = F_m e^{f\alpha}$$

6. Avec les valeurs numériques données, on obtient

$$f = 0,2 \quad \alpha = 6\pi \quad F_v = 1000\text{ N} \quad F_m = 23\text{ N}$$

On constate que trois tours de cordage permettent de diviser l'effort de traction par 40 !

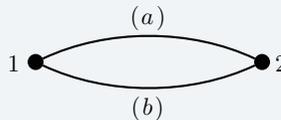
2.7 Agitateur

1. Si on pose une tige avec un angle α trop grand, la tige tombe à l'intérieur du tube. Si par contre on pose une tige avec un angle α trop petit, la tige tombe à l'extérieur du tube. On déduit de ces constatations les deux propositions suivantes :

- en faisant varier l'angle α de *trop grand* à *trop petit*, il existe une position pour laquelle la tige ne tombe ni à l'intérieur, ni à l'extérieur du tube ;
- éloigner la tige de sa position d'équilibre provoque sa chute.

On en conclut qu'une position d'équilibre existe bien, mais qu'il s'agit d'un équilibre instable.

2. On commence par analyser le dispositif en traçant le graphe des contacts



L'observation des mouvements lors de l'expérimentation préliminaire permet d'affiner l'analyse des contacts :

- le point A est immobile sur la tige et glisse le long du tube ;
- le point B est immobile sur le tube et glisse le long de la tige.

C'est pourquoi on propose de les caractériser de la manière suivante :

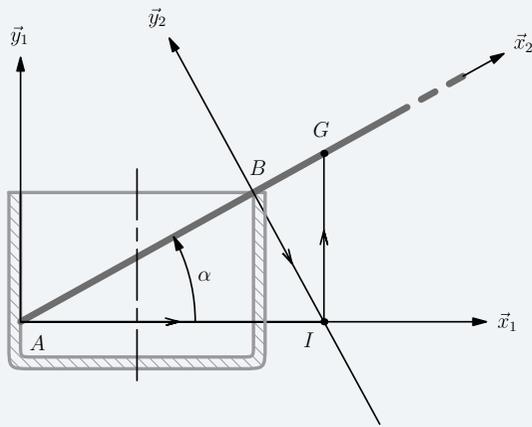
- contact ponctuel en A de normale \vec{x}_1 ;
- contact ponctuel en B de normale \vec{y}_2 .

Lors de l'étude de l'équilibre de 2 par rapport à 1, il est nécessaire de faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures $\vec{2} \rightarrow 2$:

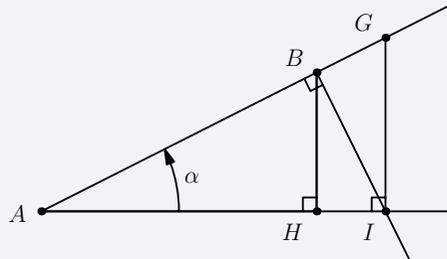
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1_A \rightarrow 2) &= {}_A \begin{cases} N_A \vec{x}_1, \text{ avec } N_A \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases} \\ \mathcal{F}(1_B \rightarrow 2) &= {}_B \begin{cases} N_B \vec{y}_2, \text{ avec } N_B \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases} \\ \mathcal{F}(p \rightarrow 2) &= {}_G \begin{cases} -mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

L'agitateur 2 est en équilibre sous l'action de trois glisseurs, et les axes centraux des actions de contact en A et en B sont sécants en un point I .

On en déduit la seule position possible du centre de masse G pour laquelle les trois axes centraux sont concourants.



3. On constate qu'une fois le diamètre d choisi et l'angle α tracé, la position du point d'intersection I est imposée, donc la demi longueur a de l'agitateur.



On trouve la relation liant les trois grandeurs en considérant successivement les trois triangles rectangles $A - H - B$, $A - B - I$ et $A - I - G$

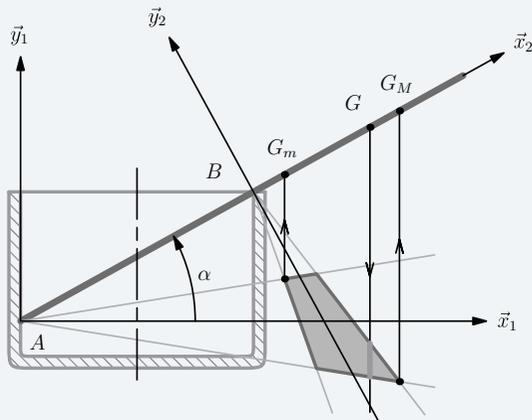
$$\cos \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AI} = \frac{AI}{AG}$$

On obtient finalement

$$\frac{d}{a} = \cos^3 \alpha$$

4. En prenant en compte le phénomène de frottement, les axes centraux des glisseurs associés aux contacts ne sont plus portés par les normales, et on utilise la construction graphique ci-dessous pour poursuivre.

Comme on est dans le cas de l'adhérence, on trace les cônes issus des points A et B de demi-angle au sommet φ , tel que $\tan \varphi = f$.



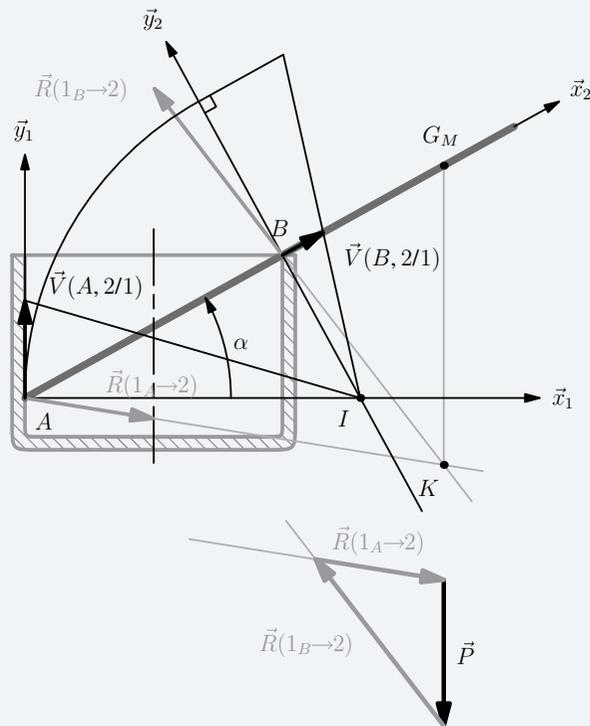
On constate que le point de concourance possible appartient à un quadrilatère.

Pour un angle α et un diamètre d donnés :

- le point G_m correspond à la position du centre de masse de la tige la plus courte compatible avec l'équilibre ;
- le point G_M correspond à la position du centre de masse de la tige la plus longue compatible avec l'équilibre ;
- pour une longueur quelconque compatible avec l'équilibre, le point de concourance est quelque part sur le segment tracé ci-dessus en bleu à partir de la position du point G . Il subsiste une indétermination, car on ne peut pas savoir où sur ce segment.

5. On choisit la longueur maximale de tige compatible avec l'équilibre :

- le centre de masse de l'agitateur est G_M ;
- les axes centraux des trois glisseurs sont concourants au point K ;
- on peut résoudre et on trace les vecteurs $\vec{R}(1_A \rightarrow 2)$ et $\vec{R}(1_B \rightarrow 2)$.



À la limite du glissement :

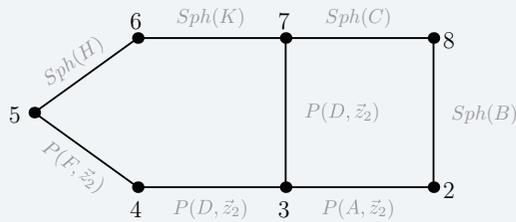
- le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 2/1)$ à venir est opposé à la composante tangentielle $\vec{T}(1_A \rightarrow 2)$;
- le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/1)$ est opposé à la composante tangentielle $\vec{T}(1_B \rightarrow 2)$.

On trace ces deux vecteurs vitesse en tenant compte du fait que le point I est le centre instantané de rotation. On constate qu'ils sont bien compatibles avec la chute de l'agitateur à l'extérieur du tube.

2.8 Robot palettiseur

1. La lecture du schéma cinématique permet l'élaboration du graphe des liaisons correspondant, en notant :

- $P(Dte)$ une liaison pivot d'axe la droite Dte ;
- $Sph(Pt)$ une liaison sphérique de centre le point Pt .



2. Équilibre de la biellette 6/2

• Actions extérieures : $5 \rightarrow 6$ et $7 \rightarrow 6$.

• Les torseurs associés à ces 2 actions sont deux glisseurs dont les axes centraux passent par l'un par H et pour l'autre par K . L'équilibre de 6 par rapport à 2 entraîne que les deux glisseurs ont même axe central HK et $\vec{R}(7 \rightarrow 6) = -\vec{R}(5 \rightarrow 6) = F_6 \vec{x}_4$.

$$\mathcal{F}(7 \rightarrow 6) = \begin{Bmatrix} F_6 \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K$$

3. Équilibre du poignet 5/2

• Actions extérieures à 5 : $6 \rightarrow 5$ et $4 \rightarrow 5$ et la pesanteur $p \rightarrow 5$.

• Les torseurs associés à ces 3 actions sont

$$\mathcal{F}(6 \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} F_6 \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H \quad \mathcal{F}(4 \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(4 \rightarrow 5) \\ \vec{M}(F, 4 \rightarrow 5) \perp \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} -m_5 g \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_5}$$

• En écrivant l'équation de moment au point F scalaire \vec{z}_2 , on obtient

$$\left(-m_5 g \vec{y}_2 \wedge \vec{G}\vec{F} \right) \cdot \vec{z}_2 + \left(F_6 \vec{x}_4 \wedge \vec{H}\vec{F} \right) \cdot \vec{z}_2 = 0$$

$$m_5 g c - a F_6 (\vec{x}_4 \wedge \vec{y}_7) \cdot \vec{z}_2 = 0$$

$$F_6 = \frac{c}{a \cos(\alpha - \theta - \beta)} m_5 g$$

4. Équilibre de l'ensemble $\Sigma = \{4, 5, 6\}$ par rapport à 2

• Actions extérieures à Σ : $7 \rightarrow 6$, $3L \rightarrow 4$ par la liaison, $3f \rightarrow 4$ par le frein, la pesanteur $p \rightarrow 5$ et la pesanteur $p \rightarrow 4$.

• Détail des torseurs

$$\mathcal{F}(7 \rightarrow 6) = \begin{Bmatrix} F_6 \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} -m_5 g \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_5} \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} -m_4 g \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_4}$$

Pour l'action $3 \rightarrow 4$, on distingue la contribution de la liaison et celle du frein

$$\mathcal{F}(3L \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(D, 3 \rightarrow 4) \perp \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(3f \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{f_{34}} \vec{z}_2 \end{Bmatrix}$$

• Équation de moment au point D scalaire \vec{z}_2

$$\begin{aligned} & \left(-m_5 g \vec{y}_2 \wedge \vec{G}_5 \vec{D} \right) \cdot \vec{z}_2 + \left(-m_4 g \vec{y}_2 \wedge \vec{G}_4 \vec{D} \right) \cdot \vec{z}_2 \\ & + \left(F_6 \vec{x}_4 \wedge \vec{K} \vec{D} \right) \cdot \vec{z}_2 + \vec{M}(D, 3 \rightarrow 4) \cdot \vec{z}_2 + M_{f_{34}} = 0 \end{aligned}$$

On obtient après calcul

$$M_{f_{34}} = - \left(m_5 + \frac{1}{2} m_4 \right) g b \cos(\theta + \beta)$$

5. Stratégie de résolution :

- en étudiant l'équilibre 8/2, on arrivera à la mise en place d'un glisseur de résultante $-F_8\vec{y}_3$ et d'axe central passant par B pour l'action $2 \rightarrow 8$;
- en étudiant l'équilibre 7/2 et en écrivant l'équation de moment statique au point D scalaire \vec{z}_2 , on détermine F_8 ;
- en étudiant l'équilibre de l'ensemble $\{3,4,5,6,7,8\}$ par rapport à 2 et en écrivant l'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_2 , on détermine $M_{f_{23}}$.

6. Détermination de $M_{f_{23}}$

• Équilibre de 7 par rapport à 2 :

- actions extérieures à 7 : $6 \rightarrow 7$, $8 \rightarrow 7$ et $3 \rightarrow 7$;
- les torseurs associés à ces trois actions sont

$$\mathcal{F}(6 \rightarrow 7) =_K \begin{Bmatrix} -F_6 \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(8 \rightarrow 7) =_C \begin{Bmatrix} -F_8 \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 7) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 7) \\ \vec{M}(D, 3 \rightarrow 7) \perp \vec{z}_2 \end{Bmatrix}$$

- en écrivant l'équation de moment statique au point D scalaire \vec{z}_2

$$\left(-F_6 \vec{x}_4 \wedge \overrightarrow{KD} \right) \cdot \vec{z}_2 + \left(-F_8 \vec{y}_3 \wedge \overrightarrow{CD} \right) \cdot \vec{z}_2 = 0$$

$$F_8 = \frac{\cos(\alpha - \beta - \theta)}{a \cos \theta} F_6 = \frac{c}{a \cos \theta} m_5 g$$

• Équilibre de $\{3,4,5,6,7,8\}$ par rapport à 2 :

- actions extérieures à $\{3,4,5,6,7,8\}$: pesanteur $p \rightarrow 3$, $p \rightarrow 4$ et $p \rightarrow 5$; $2 \rightarrow 8$; $2L \rightarrow 3$ par la liaison et $2f \rightarrow 3$ par le frein ;
- les torseurs associés à ces actions sont

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) =_{G_3} \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 4) =_{G_4} \begin{Bmatrix} -m_4 g \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 5) =_{G_5} \begin{Bmatrix} -m_5 g \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(2 \rightarrow 8) =_B \begin{Bmatrix} -F_8 \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour l'action $2 \rightarrow 3$, on considère séparément la liaison pivot et le frein

$$\mathcal{F}(2L \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \perp \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(2f \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{f_{23}} \vec{z}_2 \end{Bmatrix}$$

- en écrivant l'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_2

$$\begin{aligned} & \left(-m_3 g \vec{y}_2 \wedge \overrightarrow{G_3 A} \right) \cdot \vec{z}_2 + \left(-m_4 g \vec{y}_2 \wedge \overrightarrow{G_4 A} \right) \cdot \vec{z}_2 \\ & + \left(-m_5 g \vec{y}_2 \wedge \overrightarrow{G_5 A} \right) \cdot \vec{z}_2 + \left(-F_8 \vec{y}_3 \wedge \overrightarrow{BA} \right) \cdot \vec{z}_2 + M_{f_{23}} = 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement après calcul

$$M_{f_{23}} = - \left(\left(m_5 + \frac{1}{2} m_4 \right) \cos(\theta + \beta) + \left(m_5 + m_4 + \frac{1}{2} m_3 \right) \sin \theta \right) g b$$

2.9 Coinceur à cames

1. On commence par tracer un graphe des liaisons et des contacts, en notant :

- $P(dte)$ une liaison pivot d'axe la droite dte ;
- $CP(pt, vec)$ un contact ponctuel au point pt de normale vec .

Avec l'hypothèse de modélisation plane, toutes les actions mécaniques associées aux liaisons et contacts sont assimilables à des glisseurs. On propose alors la stratégie suivante.

- On suppose réalisé l'équilibre de 3/1 :
 - actions mécaniques extérieures à 3 : $2 \rightarrow 3$ et $1 \rightarrow 3$;
 - la came 3 est supposée en équilibre sous l'action mécanique de deux glisseurs : ces deux glisseurs admettent la droite (OA) comme axe central

On constate que la droite (AO) est inclinée d'un angle α par rapport à la normale (A, \vec{n}) au contact.

- On suppose réalisé l'équilibre de 4/1 :
 - actions mécaniques extérieures à 4 : $2 \rightarrow 4$ et $1 \rightarrow 4$;
 - de la même façon, la droite (BO) est l'axe central commun aux deux glisseurs, incliné de l'angle α par rapport à la normale au contact (B, \vec{x}_1) .

• On suppose réalisé l'équilibre de $\Sigma = \{2, 3, 4\}$ par rapport à 1 :

- actions mécaniques extérieures $\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$: trois glisseurs, modélisant la charge $c \rightarrow 2$ et les actions de la paroi $1 \rightarrow 3$ et $1 \rightarrow 4$;
- ces trois glisseurs ont leur axes centraux concourants au point O ;
- l'équation de résultante scalaire \vec{x}_1 donne

$$\|\vec{R}(1 \rightarrow 4)\| = \|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\|$$

- l'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 permet d'écrire

$$\|\vec{R}(1 \rightarrow 4)\| = \|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\| = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

Pour un angle α de 20° , on obtient un module d'environ 20 kN.

2. On exploite l'interprétation graphique des lois du frottement pour répondre :

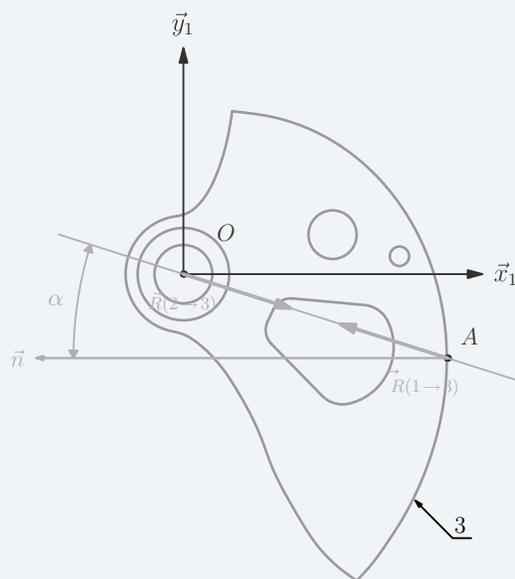
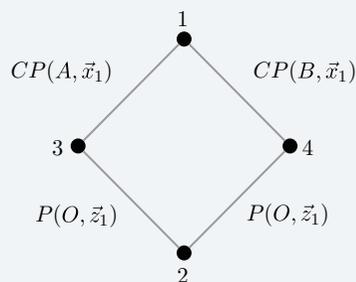
- La droite (OA) est l'axe central du glisseur $\mathcal{F}(1 \rightarrow 3)$, incliné de l'angle α par rapport à la normale au contact en A . Pour que l'équilibre soit possible, il faut que l'angle d'adhérence φ soit supérieur à α .

Soit f le coefficient de frottement du couple acier-roche, il est donc nécessaire d'avoir

$$\tan \alpha < f$$

- Par ailleurs, on vérifie que la composante tangentielle de l'action mécanique $1 \rightarrow 3$ est bien opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}(A, 3/1)$ qui apparaîtrait s'il y avait déplacement de 3 par rapport à 1 sous l'effet de la charge P . Il est également nécessaire d'avoir

$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{V}(A, 3/1) < 0$$



3. Pour comprendre le problème, on se place dans le référentiel 1 et on imagine plusieurs positions de la came 3, comme le montre la figure ci-contre.

Ces tracés permettent plusieurs constatations.

- Le point de contact courant se déplace sur la droite (OA) , avec l'angle α constant.
- Si on considère les deux points extrêmes P_1 et P_2 du profil de la came, les largeurs extrêmes entre les deux faces de la fissure sont

$$2OP_1 \cos(\alpha) \text{ et } 2OP_2 \cos(\alpha)$$

Pour trouver l'équation du profil à adopter, on exprime maintenant la contrainte « l'angle α doit rester constant » dans un référentiel lié à la came :

- on pose un repère $(O, \vec{u}_3, \vec{v}_3)$ lié à la came 3, avec le point P_1 sur la droite $(0, \vec{u}_3)$ par exemple ;

$$\vec{OP}_1 = r_1 \vec{u}_3$$

- le point de contact courant P est repéré en coordonnées polaire (ρ, θ) ;

$$\vec{OP} = \rho(\theta) \vec{e}_r$$

- on trace au point P le vecteur normal au contact \vec{n} incliné de l'angle α par rapport au vecteur \vec{PO} , ce qui revient à imposer également

$$(\vec{e}_t, \vec{t}) = \alpha$$

La figure ci-contre exprime ces différentes propositions.

L'équation à résoudre est alors

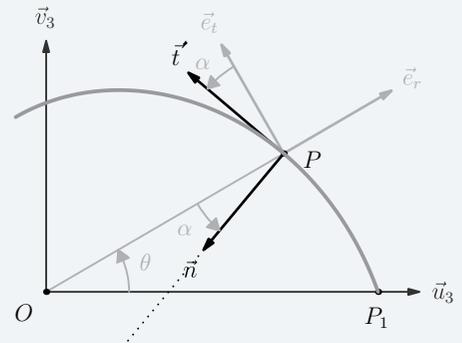
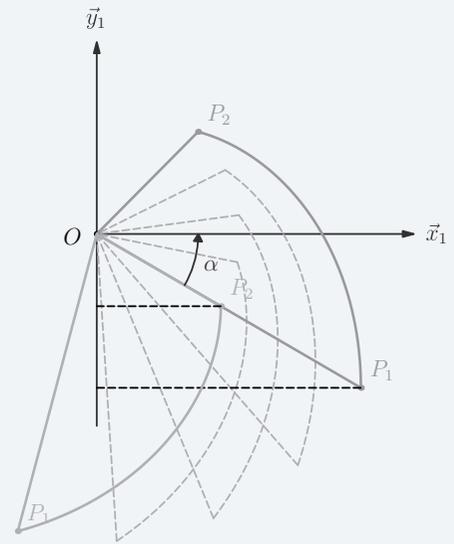
$$\frac{-\vec{t} \cdot \vec{e}_r}{\vec{t} \cdot \vec{e}_t} = \tan \alpha$$

Comme \vec{t} est colinéaire à $\frac{d\rho}{d\theta} \vec{e}_r + \rho \vec{e}_t$, cette condition devient

$$\frac{-\frac{d\rho}{d\theta}}{\rho} = \tan \alpha$$

La condition conduit ainsi à un profil en spirale logarithmique d'équation polaire

$$\rho(\theta) = r_1 e^{-\theta \tan \alpha}$$



Plan

Les méthodes à retenir	80
Énoncés des exercices	80
Du mal à démarrer ?	91
Corrigés	92

Thèmes abordés dans les exercices

- identifier les mouvements de solide indéformable
- dénombrer équations et inconnues
- interpréter les degrés de mobilité et de statisme
- rechercher des lois de comportement
- exploiter des résultats analytiques
- lire des courbes issues de simulation

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- notion de solide indéformable
- notion de mouvement
- graphe de structure, graphe des liaisons
- chaînes ouvertes et chaînes fermées
- nombre de cycles
- variables et invariants
- approche cinématique et approche dynamique
- représentation matricielle des systèmes d'équations linéaires
- indice de mobilité
- degré de mobilité et degré de statisme

Les méthodes à retenir

Dénombrer les mouvements

- Différencier pièces et mouvements.
- Identifier les référentiels possibles.

➔ Exercice 3.1

Caractériser un mécanisme par une approche cinématique

- Évaluer le nombre de cycles indépendants.
- Dénombrer équations et inconnues.
- Calculer l'indice de mobilité.
- Interpréter les inégalités obtenues pour les degrés de mobilité et de statisme.
- Appliquer les méthodes travaillées en cinématique.

➔ Exercices 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

Caractériser un mécanisme par une approche dynamique

- Évaluer le nombre d'équilibres ou de mouvements pour une étude systématique.
- Dénombrer équations et inconnues.
- Calculer l'indice de mobilité.
- Interpréter les inégalités obtenues pour les degrés de mobilité et de statisme.
- Appliquer les méthodes travaillées en statique.

➔ Exercices 3.5, 3.6

Énoncés des exercices

3.1 Mouvements

On s'intéresse dans cet exercice au décompte des mouvements envisageables sur un ensemble de n solides.

On rappelle qu'un mouvement de solide indéformable se note sous la forme i/k , et se lit « mouvement de i par rapport à k ».

1. Lister les mouvements envisageables sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1 de la figure 3.1, en distinguant les mouvements de solide indéformable des autres.

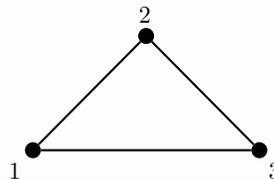


Figure 3.1 – Exemple d'une chaîne fermée

2. Lister les seuls mouvements de solide indéformable envisageables sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3 – 4 de la figure 3.2.

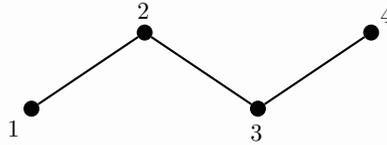


Figure 3.2 – Exemple d'une chaîne ouverte

3. Généraliser l'approche précédente et exprimer le nombre N de mouvements de solide indéformable envisageables sur un ensemble de n solides.
4. Appliquer le résultat précédent au graphe de structure du mécanisme présenté sur la figure 3.3.

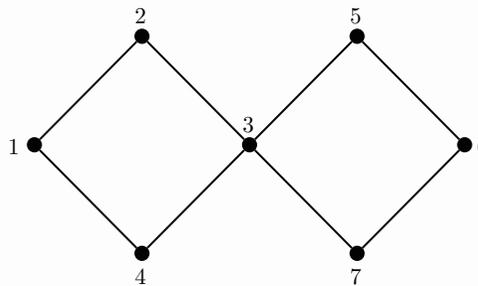


Figure 3.3 – Exemple d'un mécanisme complexe

3.2 Ponceuse

On considère une ponceuse à tête triangulaire oscillante dont le fonctionnement est décrit par les schémas des figures 3.4 et 3.5. Elle comprend :

- un carter 1, auquel on associe le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un arbre moteur à excentrique 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{y}_1) avec le carter ;
- un patin 4 en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le carter ;
- un piston 3 en liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{y}_1) avec 2 et en liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{z}_1) avec le patin.

La rotation rapide de 3000 tr/mn de 2 par rapport à 1 provoque la rotation alternative du patin 4 par rapport à 1.

Paramétrage :

- le fonctionnement repose sur l'excentricité e de l'arbre moteur 2, à savoir la distance entre les axes (A, \vec{y}_2) et (B, \vec{y}_2) , ainsi que sur la longueur L du bras du patin 4, à savoir la distance entre les axes (A, \vec{z}_4) et (B, \vec{z}_4) ;
- sur la machine étudié, on a $e \ll L$;
- la position de 2 par rapport à 1 est repérée par l'angle $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$;
- la position de 4 par rapport à 1 est repérée par l'angle $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_4)$.

Hypothèse :

- dans cet exercice, on suppose le système dans des configurations telles que l'angle θ n'est jamais un multiple de $\pi/2$.

Objectifs :

- déterminer les degrés de mobilité et de statisme ;
- déterminer la loi entrée-sortie cinématique.

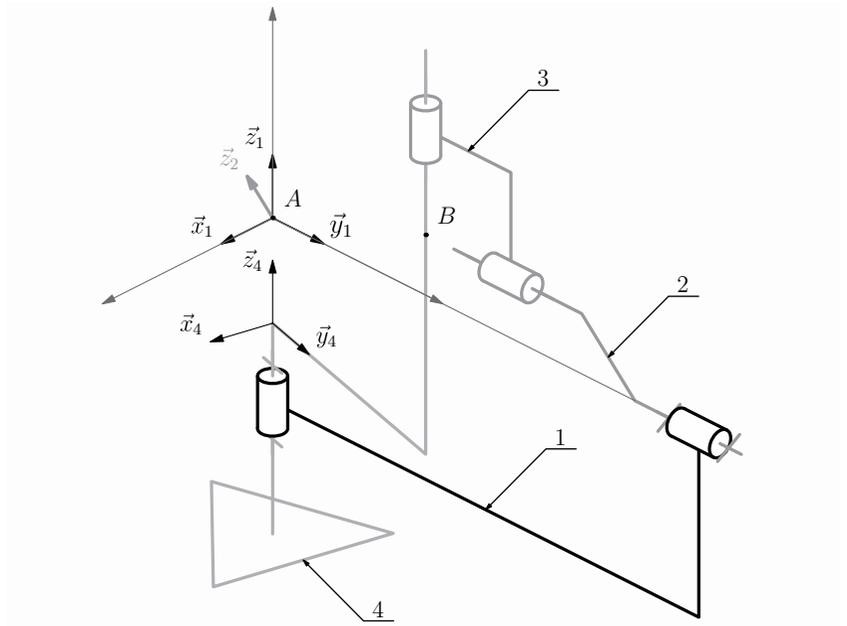


Figure 3.4 – Schéma cinématique en perspective isométrique

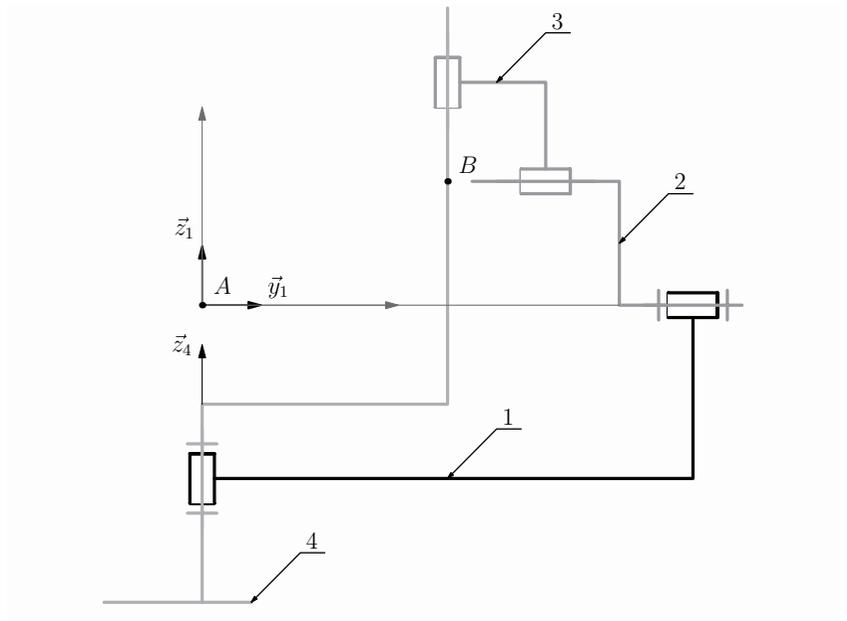


Figure 3.5 – Schéma cinématique dans le plan $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

1. Tracer le graphe des liaisons et mettre en place les torseurs cinématiques $\mathcal{V}(2/1)$, $\mathcal{V}(4/1)$, $\mathcal{V}(3/2)$ et $\mathcal{V}(3/4)$.
2. Calculer et interpréter l'indice de mobilité de ce mécanisme.
3. Que dire du degré de statisme du mécanisme sachant que le modèle de travail est construit à partir d'un outillage électro-portatif qui fonctionne ?
4. Déterminer par le calcul les degrés de mobilité et de statisme du mécanisme.

5. Dédurre du travail précédent la loi entrée-sortie. Peut-elle déboucher sur une loi entrée-sortie en position ?
6. L'hypothèse initiale sur l'angle θ est-elle utile dans l'étude des degrés de mobilité et de statisme ?

3.3 Pompe à pistons axiaux

La structure que l'on se propose d'étudier est le modèle cinématique d'une pompe volumétrique à pistons axiaux, présenté figure 3.6. Un moteur entraîne la rotation de l'arbre 1 par rapport au bâti 0. Le débit est généré par la translation rectiligne alternative de cinq pistons 3_i par rapport au bâti 0. Le schéma cinématique donné ne présente qu'un seul des pistons, lesquels sont régulièrement répartis autour de l'axe de rotation de l'arbre moteur 1.

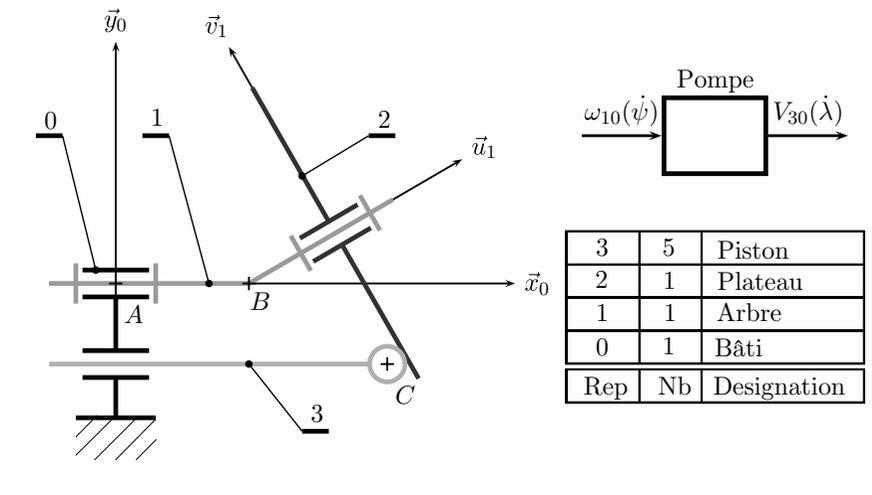


Figure 3.6 – Schéma cinématique de la pompe à pistons axiaux

Ce mécanisme comporte quatre ensembles :

- un bâti 0, auquel est associé le repère $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose $\vec{AB} = b\vec{x}_0$;
- un arbre 1, relié au bâti 0 par une liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_0) :
 - le repère $(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est attaché à 1 tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$ et on pose $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$,
 - un repère $(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_1)$ est également lié à 1 et on pose l'angle $\theta = (\vec{x}_1, \vec{u}_1)$ constant.
- un plateau 2, relié à l'arbre 1 par une liaison pivot d'axe (B, \vec{u}_1) . À ce plateau est associé le repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{u}_1$ et on pose $\varphi = (\vec{v}_1, \vec{y}_2)$.
- un piston 3, lié au bâti 0 par une liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{x}_0) :
 - on pose $\vec{AC} = -R\vec{y}_0 + \lambda\vec{x}_0$,
 - le piston comporte une calotte sphérique de rayon r à son extrémité et le contact avec le plateau (2) est modélisé par une liaison sphère plan de centre C et de normale \vec{x}_2 .

1. Tracer le graphe des liaisons associé à ce mécanisme et rechercher les invariants géométriques de cette structure.
2. Calculer l'indice de mobilité en ne tenant compte que d'un seul piston. Que peut-on en déduire ?

3. Caractériser le torseur cinématique de chaque liaison.
4. Exprimer $\dot{\lambda}$ en fonction de $\dot{\psi}$, de ψ et des invariants géométriques du mécanisme.
5. En supposant qu'il y ait non glissement entre 3 et 2, exprimer $\dot{\varphi}$ en fonction de $\dot{\psi}$ de deux manières différentes. Conclure quant à la validité de cette hypothèse.
6. Proposer une solution technologique permettant de matérialiser la liaison entre 3 et 2 avec des surfaces de contact.

3.4 Robot à structure parallèle

Ce robot à structure parallèle ABB IRB340 est adapté au *picking*, c'est-à-dire à la prise et la dépose d'objets avec des déplacements rapides. Il s'agit d'un robot « quatre axes », dont trois servent à déplacer un plateau porte-préhenseur en translation spatiale par rapport au bâti. Le quatrième axe consiste à faire tourner le préhenseur autour d'un axe vertical. Ce dernier n'est pas pris en compte dans cet exercice, et donc non décrit sur la figure 3.7.

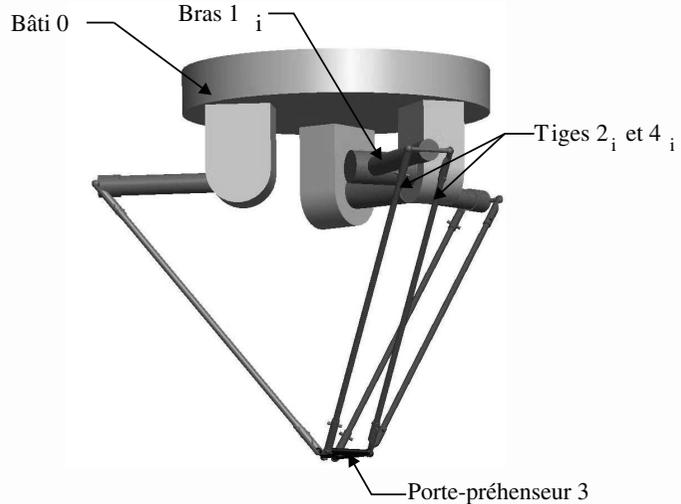


Figure 3.7 – Vue d'ensemble du robot ABB IRB340

Le mécanisme ainsi étudié est constitué :

- d'un bâti, repéré 0 ;
- d'un porte-préhenseur, repéré 3 ;
- de trois sous-structures identiques notées a , b et c et comprenant chacune, avec $i \in \{a, b, c\}$:
 - un bras 1_i en liaison pivot d'axe (K_i, \vec{y}_{1i}) avec le bâti,
 - deux tiges 2_i et 4_i en liaison sphérique de centres respectifs A_i et D_i avec le bras 1_i , B_i et C_i avec le porte-préhenseur 3.

1. Réaliser le graphe de structure de ce mécanisme.
2. Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques ainsi que le nombre d'équations cinématiques.
3. Calculer et interpréter l'indice de mobilité de ce mécanisme.

On accepte la proposition suivante : le déplacement en translation spatiale du porte-préhenseur 3 par rapport au bâti 1 est imposé par le pilotage des liaisons pivot entre le bâti et chacun des trois bras. En conséquence, on bloque dans un premier temps ces trois liaisons pivot.

4. En considérant la seule chaîne ouverte $0 - 1_a - 2_a - 3$, calculer le nombre de degrés de liberté annulés par la tige 2_a dans le mouvement de 3 par rapport à 0.
5. En considérant le mécanisme en entier, évaluer, cette fois sans calcul, les degrés de mobilité et de statisme de cette structure.

On s'intéresse maintenant à une des trois sous-structure i , avec $i \in \{a, b, c\}$, telle que représentée sur la figure 3.8 ; elle comprend les solides $1_i, 2_i, 3$ et 4_i . Pour la suite de cette question, on omet l'indice i . On souhaite montrer qu'une telle sous-structure contribue à réduire le mouvement $3/0$ à une translation.

On pose $AB = DC = L$ et $AD = BC = 2e$.

On se place dans une configuration initiale pour laquelle $ABCD$ est un parallélogramme non écrasé.

6. Étudier la fermeture de la chaîne cinématique et montrer que dans toute configuration initiale, on a

$$\vec{\Omega}(3/1) \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AD}) = 0 \quad (3.1)$$

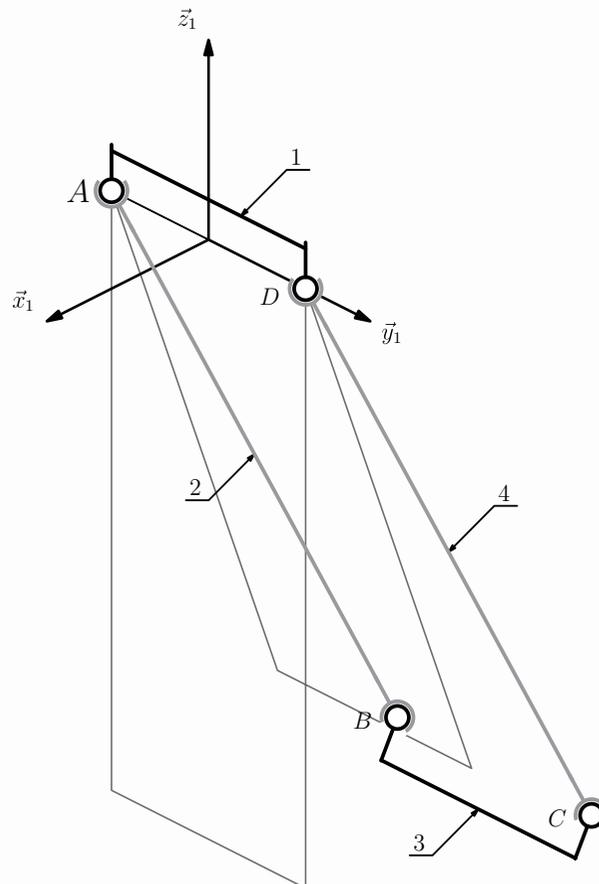


Figure 3.8 – Schéma cinématique partiel

Poser des coordonnées pour les vecteurs rotation n'est pas nécessaire pour répondre. Dans l'hypothèse où le besoin se fait quand même sentir, choisir la base vectorielle $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AB} \wedge \vec{AD})$ permet de poser, par exemple, $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_b \vec{AB} + \omega_d \vec{AD} + \omega_a \vec{AB} \wedge \vec{AD}$

On termine cette étude en considérant le mécanisme dans son ensemble.

7. En exploitant le résultat précédent et en considérant les trois liaisons pivot toujours bloquées, préciser les conditions géométriques à vérifier pour avoir à chaque instant

$$\vec{\Omega}(3/1) = \vec{0} \quad (3.2)$$

8. Conclure quant au mouvement 3/0 lorsque l'on motorise les trois liaisons pivot.

3.5 Barrière Sinusmatic

Présentation

La barrière Sinusmatic est un remarquable exemple de mécanisme sphérique. Sa particularité résulte de la cinématique brevetée de son renvoi d'angle représenté sur la figure 3.9 : il transforme le mouvement circulaire continu d'un motoréducteur en un mouvement oscillant d'un quart de tour d'une lisse de barrière.

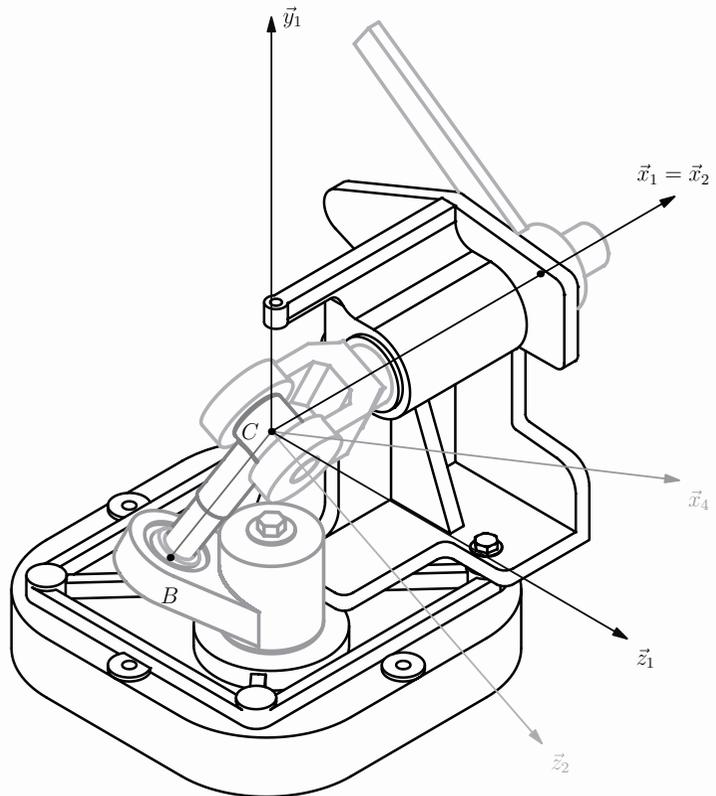


Figure 3.9 – Le renvoi d'angle de la barrière Sinusmatic

Ce mécanisme autorise des temps de manœuvre très courts, sans choc aux extrémités de la course. Le temps d'ouverture annoncé est par exemple de 3,5 secondes pour une barrière de longueur pouvant atteindre 2 mètres.

Plusieurs options et performances sont jointes en annexe à ce sujet.

Modèle cinématique et paramétrage

Ce mécanisme est composé de quatre ensembles, que l'on détaille ci-dessous.

- Un bâti 1 :
 - il lui est associé le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- Une fourche 2 :
 - elle est reliée au bâti 1 par une liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_1) ;
 - on lui associe un repère $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$, et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
 - la position de la lisse de la barrière, c'est-à-dire de la pièce qui barre effectivement le passage, reste à déterminer.
- Un croisillon 3 :
 - il est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_2) avec la fourche 2 ;
 - on lui associe le repère $(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$, et on pose : $\gamma = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$.
- Un arbre 4 :
 - il est relié au bâti par une liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_1) ;
 - on lui associe le repère $(C, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$, tel que $\vec{y}_4 = \vec{y}_1$, et on pose : $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_4)$;
 - on lui associe également un repère $(C, \vec{u}_4, \vec{v}_4, \vec{z}_4)$, et on pose : $\theta = (\vec{x}_4, \vec{u}_4)$;
 - un point B est défini sur 4 tel que $\vec{BC} = R\vec{u}_4$;
 - cet arbre 4 et le croisillon 3 sont en liaison sphère cylindre, de centre B et d'axe (C, \vec{x}_3) .

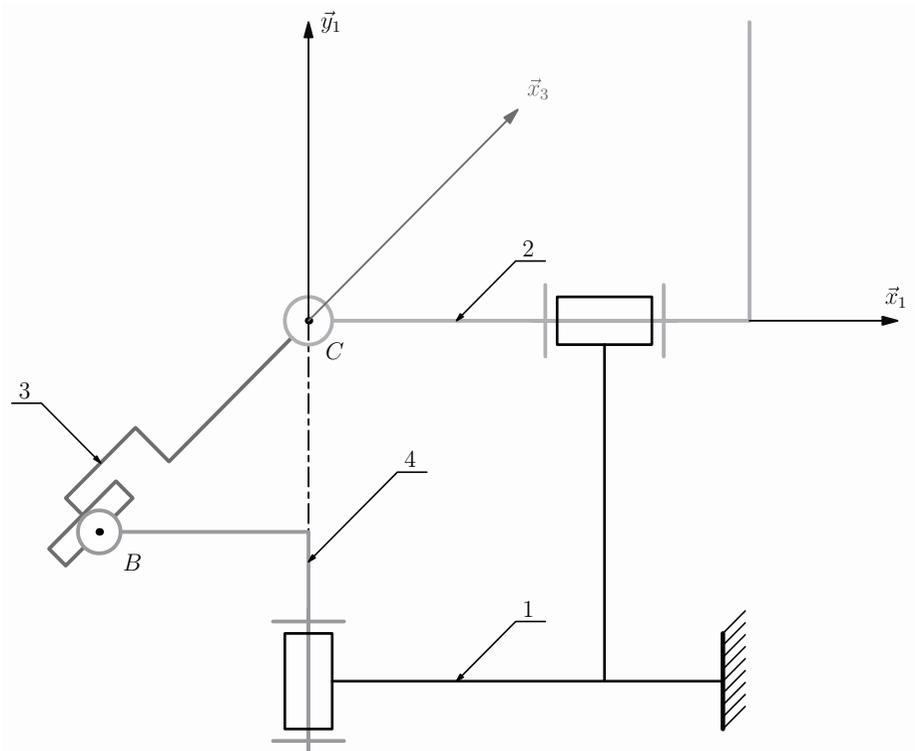


Figure 3.10 – Schéma cinématique

Compréhension du fonctionnement

1. Dénombrer variables et invariants de ce mécanisme. Caractériser le torseur cinématique de chaque liaison.

2. En vue de la recherche de la loi entrée-sortie $\dot{\beta} = f(\dot{\alpha})$, citer l'équation scalaire évitant les 5 inconnues cinématiques indésirables.

En déduire la loi entrée-sortie sous la forme $g(\beta, \dot{\beta}, \alpha, \dot{\alpha}, \theta) = 0$.

3. En supposant de plus les conditions initiales nulles, trouver la loi géométrique entre les variables α , β et θ parmi les huit propositions suivantes

$$\tan \alpha = \pm \frac{\sin \beta}{\tan \theta} \quad \tan \alpha = \pm \sin \beta \tan \theta \quad \tan \beta = \pm \frac{\sin \alpha}{\tan \theta} \quad \tan \beta = \pm \sin \alpha \tan \theta$$

4. On souhaite une amplitude de 90° pour la rotation de la lisse par rapport au bâti. En déduire la valeur numérique correspondante de l'angle θ .

Choix de conception

5. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 4/3)$ est nul.

De même, montrer que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(4/3)$ est porté par \vec{x}_3 .

6. Quel intérêt y a-t-il alors de ne pas poser une liaison pivot entre 3 et 4 ?

Performances cinématiques

Indépendamment des résultats précédents, l'utilisation d'un logiciel a permis d'obtenir la loi entrée-sortie $\beta = f(\alpha)$ pour une valeur de l'angle θ donnée. Cette courbe est tracée sur la figure 3.11. La lisse de la barrière est supposée évoluer dans le quart de plan $y_1 \geq 0, z_1 \geq 0$.

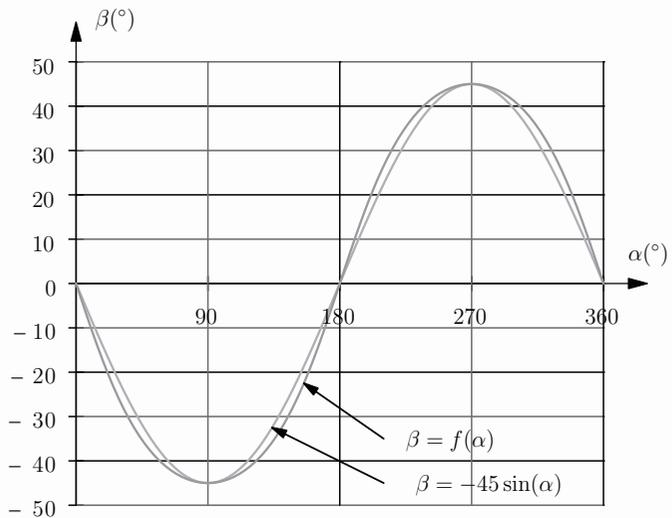


Figure 3.11 – Loi géométrique $\beta = f(\alpha)$

7. Reproduire l'allure de cette courbe et la compléter de manière à y indiquer les positions barrière ouverte et fermée.

8. Pour un cycle d'ouverture en 3,5 s, déterminer quelle doit être la fréquence de rotation de l'arbre d'entrée 4.

En supposant cette fréquence uniforme, superposer à la courbe précédente l'allure de la fonction $\dot{\beta} = h(\alpha)$.

9. Représenter en perspective isométrique le schéma cinématique minimal de ce mécanisme pour la position barrière fermée.

10. Commenter l'affirmation : « Ce mécanisme autorise des temps de manœuvre très courts, sans choc aux extrémités de la course ».

Valider une performance dynamique

Un utilisateur malhonnête cherche à manœuvrer la lisse de la barrière. Son action est modélisée par un couple C_r suivant \vec{x}_1 . Les différentes actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les actions mécaniques de liaison. Le couple moteur exercé sur l'arbre 4 est posé suivant \vec{y}_1 et est noté C_m . L'évolution est suffisamment lente pour que l'on puisse considérer le passage d'une position à une autre comme une succession d'équilibres.

On s'intéresse à la valeur du couple moteur C_m en fonction du couple résistant C_r .

11. Dénombrer équations et inconnues du problème et conclure quant à la possibilité de le résoudre.
12. Dénombrer les équilibres à étudier possibles. Pour chacun d'eux, faire l'inventaire du milieu environnant et dénombrer les inconnues.
Proposer une stratégie de résolution minimisant le nombre d'équations à écrire.
13. Déterminer par une méthode au choix la relation entre le couple moteur C_m et le couple résistant C_r .
14. En supposant le couple résistant C_r constant, donner l'allure de la courbe C_m en fonction de l'angle α .
15. La notice technique annonce l'irréversibilité du mécanisme en positions ouverte et fermée. Commenter cette affirmation.

Annexe : Spécifications techniques**Alimentation**

- Jusqu'à 10 cycles/heure :
→ transformateur 220/12 V
- Intensif chargeur
- Solaire, *après étude*
- Réserve de marche 300 manœuvres par batterie

Commande

- Radio homologuée codée 1 024 combinaisons
- Détecteur à boucle magnétique
- Lecteur de badge
- Clavier codé filaire ou radio
- Fermeture automatique temporisée, de 3 s à l'infini

Sécurité

- Alimentation basse tension 12 volts
- Irréversibilité du mécanisme en position ouverte et fermée
- Sécurité bidirectionnelle contre le bris de la lice
- Accès au mécanisme par un outil spécial, inviolable
- Limiteur de couple électronique ajustable

Option anti-vandalisme

- Moyeu articulé breveté à liberté 1/2 sphérique

Mécanique

- Couple de sortie autorisé 15 mkg
- Borne tôle d'acier galvanisé revêtue peinture époxy
→ couleur standard rouge
- Contrepoids d'équilibrage réglable
- Poids total 50 kg
- Poids mécanisme seul 9 kg
- Conditions climatiques -20°C $+70^{\circ}\text{C}$
- Étanchéité IP 549

3.6 Train d'atterrissage

Soit un mécanisme de train d'atterrissage monté sur un banc d'essai. Il est constitué de cinq solides :

- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\overrightarrow{D\vec{A}} = d\vec{x}_1$;
- une jambe 4, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ en choisissant $\vec{z}_4 = \vec{z}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$, ainsi que $\overrightarrow{B\vec{A}} = b\vec{x}_4$, $\overrightarrow{B\vec{C}} = a\vec{x}_4 + c\vec{y}_4$;
- une roue 3 de rayon R , en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_2) avec la jambe 4 ;
- une contre-fiche 5, en liaisons sphérique de centre D avec le bâti et de centre C avec la jambe, empêche la rotation de cette dernière par rapport au bâti autour de l'axe (A, \vec{z}_1) . On pose $\overrightarrow{D\vec{C}} = L\vec{x}_5$, ainsi que $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_5)$;
- un coulisseau 2, en liaison glissière de direction \vec{y}_1 avec le bâti 1, vient en contact avec la roue 3 en un point unique I . On lui associe une base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ et on pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Un vérin hydraulique non représenté exerce sur 2 une action connue et modélisée par un glisseur $\mathcal{F}(v \rightarrow 2)$ de résultante $F\vec{y}_1$.

Les liaisons et le contact sont supposés sans frottement.

1. Déénombrer variables et invariants caractérisant ce mécanisme.
2. Émettre un avis sur le statisme de la structure proposée.
3. Déterminer les efforts supportés par la contre-fiche 5 en fonction de l'effort de poussée F .

On considère maintenant le contact au point I entre la roue 3 et le coulisseau 2 caractérisé par le coefficient de frottement noté f .

4. Identifier les modifications à apporter à l'étude précédente.

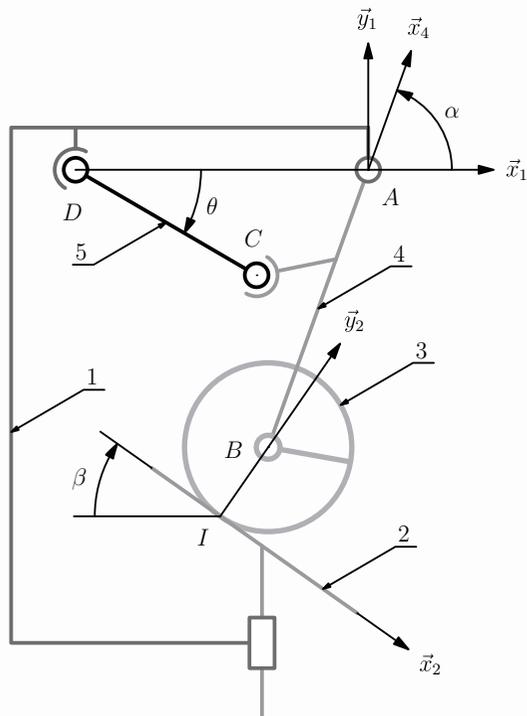


Figure 3.12 – Schéma cinématique du train d'atterrissage monté sur le banc d'essai

Du mal à démarrer ?

3.1 1. Un mouvement s'exprime sous la forme Σ/R , avec R solide indéformable et Σ un système quelconque.

2. Se restreindre aux seuls systèmes indéformables.

3. Exploiter le fait qu'un mouvement de solide indéformable se note sous la forme i/k , avec i et k deux solides différents.

3.2 3. Interpréter l'indice de mobilité en admettant au moins un degré de mobilité.

4. Écrire le système d'équations :

- identifier les vecteurs qui restent confondus au cours du temps ;
- écrire la composition des vitesses au point B ;
- décrire le vecteur \overrightarrow{AB} de deux manières ;
- choisir à chaque fois la description qui évite d'introduire des longueurs variables.

La résolution « manuelle » de ce système permet ensuite de répondre sans calculer de déterminant.

5. La loi entrée-sortie cinématique est-elle intégrable ?

6. Ne pas oublier que $e \ll L$.

3.3 1. Les variables cinématiques sont issues des liaisons, les invariants sont des longueurs ou les angles caractéristiques des solides, que l'on détermine à partir des caractéristiques géométriques induites par les liaisons.

3. Ne surtout pas poser de composantes pour les vecteurs inconnus.

5. Il est nécessaire :

- d'introduire un point de contact et de caractériser sa position ;
- de continuer à chercher à éviter les inconnues indésirables ;
- de ne pas se décourager devant les calculs qui s'allongent un peu.

3.4 1. Procéder de manière systématique en disposant des onze solides de manière à retrouver les trois sous-ensembles identiques.

3. Imaginer les mouvements possibles en bloquant le maximum de liaisons possible.

4. S'intéresser à la forme du torseur cinématique $\mathcal{V}(3/0)$.

5. Combien y a-t-il de tiges ?

3.5 3. Dériver les lois proposées permet de proposer l'arrangement à faire sur la loi cinématique pour identifier.

5. Quelles sont les nouvelles lois entrée-sortie recherchées ? Continuer à essayer d'éviter les inconnues indésirables.

9. Commencer par mettre en place le repère de référence, puis ajouter les éléments géométriques remarquables, en suivant les directions principales pour se repérer dans l'espace.

10. La réponse est à lire sur les courbes des lois géométrique et cinématique.

12. Se contenter d'ensembles de solides... Faire un tableau de synthèse.

13. S'appuyer sur le tableau de synthèse de la question précédente.

15. La réponse est à lire sur la courbe précédente.

3.6 1. S'appuyer sur un graphe des liaisons et contacts :

- les variables sont issues des arcs ;
- les invariants appartiennent aux sommets et se retrouvent *a priori* dans les expressions des lois entrée-sortie.

2. S'intéresser aux liaisons comportant le plus de degrés de liberté pour essayer d'y imaginer des contraintes de montage.

3. Commencer par mettre en place une stratégie de résolution :

- dénombrer inconnues et équations ;
- chercher les ensembles soumis à deux actions mécaniques ;
- identifier les ensembles soumis à l'action de trois glisseurs ;
- essayer d'éviter les inconnues des liaisons pivot et glissière par exemple.

Corrigés des exercices

3.1 Mouvements

1. Neuf mouvements sont envisageables :

- six mouvements de solide indéformable ;

$$\begin{array}{ccc} 3/2 & 2/1 & 3/1 \\ 2/3 & 1/2 & 1/3 \end{array}$$

- trois mouvements de systèmes de solides.

$$\{3,2\}/1 \quad \{2,1\}/3 \quad \{3,1\}/2$$

Cette recherche systématique permet de rappeler que l'on sait envisager et définir le mouvement Σ/R d'un système matériel quelconque Σ par rapport à un repère R , ce dernier seul restant nécessairement solide.

Ceci étant dit, seul un mouvement de solide indéformable conduit à un champ de vecteurs vitesse équiprojectif, et donc à l'écriture possible d'un torseur cinématique.

2. On construit un tableau pour présenter les mouvements de solide indéformable envisageables, en inscrivant en couleur les mouvements matérialisés par des arcs

$$\begin{array}{ccc} 4/3 & 4/2 & 4/1 \\ 3/4 & 3/2 & 3/1 \\ 2/4 & 2/3 & 2/1 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \end{array}$$

3. Pour un ensemble de n solides, rechercher le nombre N de mouvements de solide à considérer revient à compter le nombre de paires ordonnées de solides possibles. Ordonnées, car les mouvements i/k et k/i ne sont pas les mêmes ! « 2 parmi n » exprime le nombre de paires non ordonnées, on en a ainsi le double

$$N = 2 \times \binom{n}{2}$$

Un dénombrement élémentaire est également possible ; pour un solide donné, il y a $n - 1$ référentiels possibles, et n solides sont à envisager

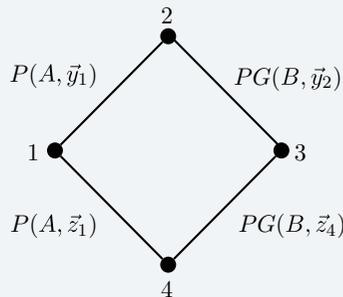
$$N = n(n - 1)$$

4. Le graphe de structure proposé comporte 7 sommets et 8 arcs :

- sept sommets, donc 42 mouvements de solides envisageables ;
- huit arcs, donc 16 mouvements particuliers, pris sur cet ensemble de 42 mouvements envisageables.

3.2 Ponceuse

1. On commence par tracer le graphe de liaisons de ce mécanisme

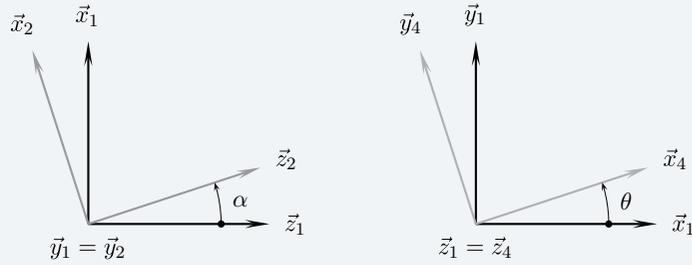


$P(dte)$	pivot d'axe (dte)
$PG(dte)$	pivot glissant d'axe (dte)

L'écriture des torseurs cinématiques est immédiate

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad \mathcal{V}(4/1) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad \mathcal{V}(3/2) = \begin{Bmatrix} \omega_{32} \vec{y}_2 \\ V_{32} \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B \quad \mathcal{V}(3/4) = \begin{Bmatrix} \omega_{34} \vec{z}_4 \\ V_{34} \vec{z}_4 \end{Bmatrix}_B$$

On complète ces torseurs avec les figures de changement de base pour les deux angles donnés α et θ



2. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de quatre solides et on compte six degrés de liberté en parcourant les liaisons. On dénombre alors :

$$\begin{cases} E_c = 6 \\ I_c = 6 \end{cases}$$

On en déduit la valeur de l'indice de mobilité

$$I_c - E_c = 0$$

Cette valeur induit une première proposition pour les valeurs des degrés de mobilité et de statisme

$$\begin{cases} m - h = 0 \\ m \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

3. Ce mécanisme fonctionne : la rotation continue du moteur par rapport au bâti 2/1 est transformée en rotation alternative du patin par rapport au bâti 4/1. On propose alors

$$\begin{cases} m - h = 0 \\ m \geq 1 \\ h \geq 1 \end{cases}$$

Cette structure serait hyperstatique de degré au moins 1.

4. Pour calculer les degrés de mobilité et de statisme, il est nécessaire d'écrire le système d'équations que l'on obtient à partir de la fermeture de la chaîne 1 - 2 - 3 - 4 - 1

$$\mathcal{V}(4/3) + \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) + \mathcal{V}(1/4) = \vec{0}$$

On choisit d'écrire l'équation de moment au point B :

$$\begin{cases} -\omega_{34}\vec{z}_4 + \omega_{32}\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\vec{y}_1 - \dot{\theta}\vec{z}_1 & = \vec{0} \\ -V_{34}\vec{z}_4 + V_{32}\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\vec{y}_1 \wedge \vec{AB} - \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \vec{AB} & = \vec{0} \end{cases}$$

Une fois constatée les égalités à chaque instant $\vec{z}_1 = \vec{z}_4 = \vec{z}_3$ et $\vec{y}_1 = \vec{y}_2 = \vec{y}_3$, on cherche à définir le vecteur \vec{AB} :

- le point A est défini sur le carter 1, à l'intersection des axes (A, \vec{y}_1) et (A, \vec{z}_1) ;
- le point B est défini sur le piston 3, à l'intersection des axes (B, \vec{y}_3) et (B, \vec{z}_3).

Deux descriptions sont ainsi possibles pour le vecteur \vec{AB} :

- sur la chaîne ouverte 1 - 4 - 3, avec une longueur variable λ ;

$$\vec{AB} = L\vec{y}_4 + \lambda\vec{z}_4$$

- sur la chaîne ouverte 1 - 2 - 3, avec une longueur variable μ .

$$\vec{AB} = e\vec{z}_2 + \mu\vec{y}_2$$

Si on cherche à éviter les deux longueurs variables λ et μ , on choisit à chaque fois entre les deux propositions celle qui convient pour écrire :

- suivant \vec{z}_1

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{AB} = e \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = e \cos \alpha$$

- suivant \vec{y}_1

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{AB} = L \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_4 = L \cos \theta$$

- suivant \vec{x}_1

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{AB} = L \vec{y}_4 \cdot \vec{x}_1 = e \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_1 = -L \sin \theta = e \sin \alpha$$

Ces constatations permettent de proposer des expressions simples en projetant les équations vectorielles issues de la fermeture cinématique dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\begin{cases} 0 & = 0 \\ \omega_{32} + \dot{\alpha} & = 0 \\ \omega_{34} + \dot{\theta} & = 0 \\ \dot{\alpha} e \cos \alpha + \dot{\theta} L \cos \theta & = 0 \\ V_{32} - \dot{\theta} e \sin \alpha & = 0 \\ -V_{34} + \dot{\alpha} e \sin \alpha & = 0 \end{cases}$$

Ce système comporte une équation $0 = 0$, donc le rang est inférieur ou égal à 5.

Si $\cos \theta \neq 0$ comme supposé, alors le système est de rang 5, car on peut exprimer les cinq inconnues $\dot{\theta}$, ω_{32} , ω_{34} , V_{32} et V_{34} en fonction de $\dot{\alpha}$.

$$r_c = 5$$

On a confirmation de ce que l'on supposait à la question précédente : le mécanisme comporte un seul degré de mobilité et est hyperstatique de degré 1

$$\begin{cases} m = I_c - r_c = 1 \\ h = E_c - r_c = 1 \end{cases}$$

5. La loi entrée-sortie recherchée est exprimée par la quatrième équation du système de six équations précédent

$$\dot{\theta} L \cos \theta = -\dot{\alpha} e \cos \alpha$$

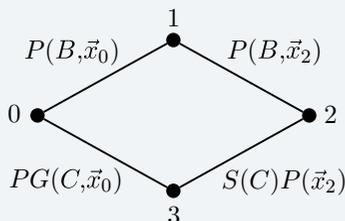
Cette équation différentielle peut être intégrée. Si on a $\theta = 0$ pour $\alpha = 0$, alors :

$$\sin \theta = -\frac{e}{L} \sin \alpha$$

6. Étant donné que sur le mécanisme $e \ll L$, l'angle θ ne peut pas prendre la valeur $\pm \frac{\pi}{2}$. Il n'y a donc pas de discussion à mener concernant le rang du système d'équations.

3.3 Pompe à pistons axiaux

1. La lecture du schéma cinématique permet l'élaboration du graphe des liaisons correspondant



$P(Dte)$:	Pivot d'axe (Dte)
$PG(Dte)$:	Pivot glissant d'axe (Dte)
$S(Pt) P (Vec)$:	Sphere de centre (Pt) Plan de normale (Vec)

Les invariants géométriques sont des grandeurs définies sur les solides :

- sur l'arbre 1 apparaissent deux demi-droites sécantes au point B . L'angle θ est ainsi défini sur cet arbre ;
- sur le plateau 2 existent une demi-droite et une direction parallèles ;
- sur le piston 3 sont définis le point C et la droite (C, \vec{x}_3) ;
- sur le bâti 0 existent une demi-droite et une droite parallèles, distantes du rayon R .

Par rapport à l'énoncé, on peut formuler quelques remarques :

- le point B est défini sur l'arbre 1 ;
- le rayon R est caractéristique du bâti ;
- la longueur b n'a aucune interprétation.

2. Le graphe des liaisons comporte une chaîne fermée de solides, ce qui permet de dénombrer les équations scalaires disponibles et de proposer $E_c = 6$.

Le décompte du nombre d'inconnues donne $I_c = 9$.

On en déduit la valeur de l'indice de mobilité et sa première interprétation

$$I_c - E_c = 3 \Rightarrow \begin{cases} m - h = 3 \\ m \geq 3 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

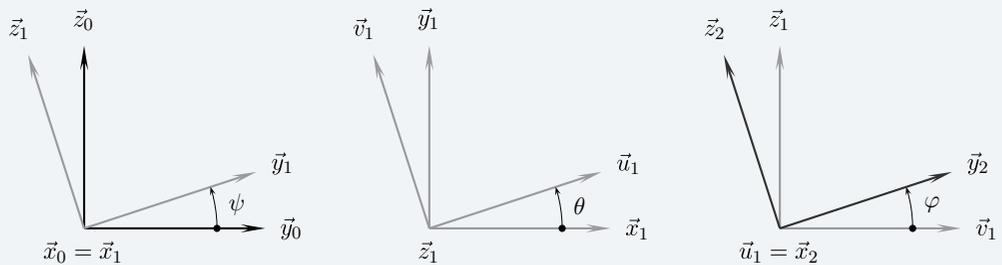
Cette structure autorise au moins trois mouvements indépendants, que l'on est sollicité à imaginer :

- la rotation du piston 3 sur lui-même ;
- la libre rotation d'axe (B, \vec{u}_1) du plateau 2 par rapport l'arbre 1, toutes les autres pièces restant immobiles par rapport au bâti ;
- le mouvement correspondant à la loi entrée-sortie posée initialement.

3. Toutes les liaisons sont des liaisons usuelles : Les torseurs cinématiques s'écrivent directement

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(3/0) &= \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{30} \vec{x}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 \end{array} \right.} & \mathcal{V}(1/0) &= \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \vec{x}_0 \\ 0 \end{array} \right.} \\ \mathcal{V}(2/1) &= \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right.} & \mathcal{V}(3/2) &= \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(3/2) \\ \vec{V}(C,3/2), \text{ avec } \vec{V}(C,3/2) \cdot \vec{x}_2 = 0 \end{array} \right.} \end{aligned}$$

En vue des calculs à faire lors des deux questions suivantes, il est utile de tracer les figures de définition des trois angles donnés par l'énoncé



4. La loi entrée-sortie recherchée met en œuvre deux inconnues sur les neuf du mécanisme. Sur la chaîne fermée $0 - 1 - 2 - 3 - 0$, la composition des vitesses au point C scalaire \vec{x}_2 évite les cinq inconnues de la liaison sphère-plan. On constate que les sixième et septième inconnues à éviter s'annulent *par chance* également :

- le taux de rotation ω_{30} n'intervient pas dans l'équation proposée ;
- le terme $(\dot{\phi} \vec{x}_2 \wedge \vec{BC}) \cdot \vec{x}_2$ est nul.

Il ne reste alors plus qu'à détailler l'égalité $\vec{V}(C,3/0) \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}(C,1/0) \cdot \vec{x}_2$ pour trouver la forme initiale de la loi cherchée

$$\dot{\lambda} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2 = (\dot{\psi} \vec{x}_0 \wedge \vec{BC}) \cdot \vec{x}_2 \quad (1)$$

- Le vecteur \vec{BC} se détermine par $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = (\lambda - b)\vec{x}_0 - R\vec{y}_0$.
- Le produit scalaire $\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2$ se calcule à partir des figures de définition des angles et le résultat est immédiat après avoir constaté les égalités $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$ et $\vec{x}_2 = \vec{u}_1$. On en déduit $\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2 = \cos\theta$
- Le produit scalaire $\vec{z}_0 \cdot \vec{x}_2$ nécessite par exemple la décomposition de \vec{x}_2 en $\cos\theta\vec{x}_1 + \sin\theta\vec{y}_1$ pour trouver $\vec{z}_0 \cdot \vec{x}_2 = \sin\theta \sin\psi$

On trouve ainsi tout calcul fait la loi recherchée

$$\dot{\lambda} = -R \tan\theta \sin\psi \dot{\psi} \quad (2)$$

5. L'énoncé précise la forme sphérique de l'extrémité du piston : soit I le point de contact entre le piston 3 et le plateau 2. À chaque instant, la position de ce point est connue par le vecteur $\vec{CI} = r\vec{x}_2$.

La condition de non-glisement au point de contact I dans le mouvement 2/3 s'exprime par

$$\vec{V}(I, 2/3) = \vec{0} \quad (3)$$

Le nombre d'inconnues cinématiques diminue et passe de neuf à sept.

De même que pour la question précédente, la recherche la plus rapide de la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ se fait en écrivant une équation scalaire qui évite les quatre inconnues scalaires indésirables. Sur la chaîne fermée $0 - 1 - 2 - 3 - 0$, l'équation de composition des vecteurs vitesse au point I évite les trois inconnues du vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/3)$. Cette équation multipliée scalairement par n'importe quel vecteur \vec{n} orthogonal à \vec{x}_0 évite également $\dot{\lambda}$. La loi recherchée s'écrit alors

$$(\dot{\varphi}\vec{x}_2 \wedge \vec{BI}) \cdot \vec{n} + (\dot{\psi}\vec{x}_0 \wedge \vec{BI}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4)$$

Pour les choix à faire, on regarde la forme du vecteur $\vec{BI} = (\lambda - b)\vec{x}_0 - R\vec{y}_0 + r\vec{x}_2$ et on tient compte des deux égalités $\vec{x}_2 = \vec{u}_1$ et $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$.

- On prend \vec{y}_1 comme vecteur \vec{n} , et on utilise les propriétés du produit mixte pour transformer l'équation précédente (4) en

$$(\vec{y}_1 \wedge \dot{\varphi}\vec{u}_1 + \vec{y}_1 \wedge \dot{\psi}\vec{x}_1) \cdot \vec{BI} = 0 \quad (5)$$

On obtient ainsi, après les calculs des deux produits vectoriels

$$(\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})\vec{z}_1 \cdot \vec{BI} = 0 \quad (6)$$

Le vecteur \vec{BI} n'est pas orthogonal au vecteur \vec{z}_1 . On en déduit une première relation

$$\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} = 0 \quad (7)$$

- Un résultat compatible devrait apparaître en prenant maintenant \vec{y}_0 comme vecteur \vec{n} , et on obtient après des calculs un peu plus longs une deuxième relation

$$\dot{\varphi}(\lambda - b) + r\dot{\psi} = 0 \quad (8)$$

Les deux équations (7) et (8) sont incompatibles : s'il n'y a pas de glissement au point I , le mécanisme est rigide.

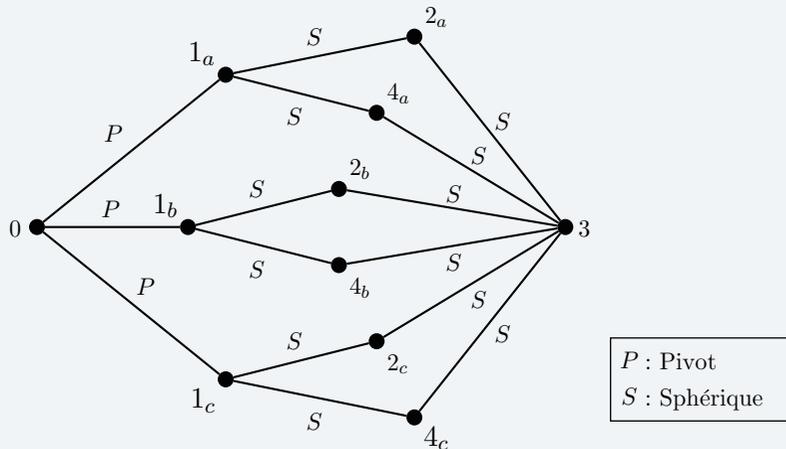
6. Entre le piston comportant une calotte sphérique à son extrémité et le plateau plan, on peut insérer un patin comportant les surfaces conjuguées aux surfaces citées : on remplace ainsi un point de contact par une portion de sphère et une portion de plan.

3.4 Robot à structure parallèle

1. On commence par tracer le graphe des liaisons qui comporte onze sommets et quinze arcs.
2. Approche cinématique : cette structure présente cinq chaînes fermées indépendantes, soit trente équations scalaires, et on dénombre trente neuf degrés de liberté.

$$I_c = 39$$

$$E_c = 30$$



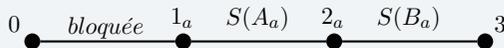
3. On calcule alors l'indice de mobilité $I_c - E_c = 9$ et on en déduit de suite

$$\begin{cases} m - h = 9 \\ m \geq 9 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Ce mécanisme admet au moins neuf mouvements indépendants :

- les six rotations des tiges sur elles-mêmes ;
- probablement les trois rotations pilotées.

4. On suppose pour cette question le bras 1_a immobile par rapport au bâti, et on reprend le graphe des liaisons de la chaîne ouverte concernée



Pour calculer le nombre de degrés de liberté annulés par la tige 2_a dans le mouvement $3/0$, on s'intéresse à la forme du torseur cinématique $\mathcal{V}(3/0)$. Pour cela, on caractérise les mouvements possibles par les torseurs cinématiques correspondants aux arcs de la chaîne ouverte précédente

$$\mathcal{V}(1_a/0) = \mathcal{O} \quad \mathcal{V}(2_a/1_a) =_{A_a} \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2_a/1_a) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2_a) =_{B_a} \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/2_a) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

La composition des mouvements sur cette chaîne ouverte permet d'écrire

$$\mathcal{V}(3/0) = \mathcal{V}(3/2_a) + \mathcal{V}(2_a/1_a) + \mathcal{V}(1_a/0)$$

On en déduit l'expression du torseur cinématique $\mathcal{V}(3/0)$ recherché

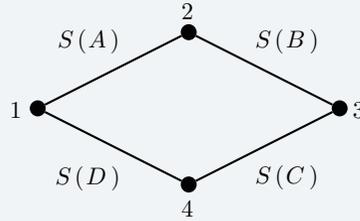
$$\mathcal{V}(3/0) =_{B_a} \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/2_a) + \vec{\Omega}(2_a/1_a) \\ \vec{\Omega}(2_a/1_a) \wedge \overrightarrow{A_a B_a} \end{Bmatrix}$$

On constate qu'à chaque instant, le produit scalaire $\vec{V}(B_a, 3/0) \cdot \overrightarrow{A_a B_a}$ est nul. Comme les deux vecteurs $\vec{\Omega}(3/2_a)$ et $\vec{\Omega}(2_a/1_a)$ sont indépendants, le vecteur vitesse $\vec{V}(B_a, 3/0)$ et le vecteur rotation $\vec{\Omega}(3/0)$ sont également indépendants, avec le vecteur rotation quelconque et le vecteur vitesse cité ayant la composante suivant $\overrightarrow{A_a B_a}$ à chaque instant nulle.

La tige 2_a annule le seul degré de liberté en translation suivant $\overrightarrow{A_a B_a}$ dans le mouvement $3/0$.

5. Chaque tige annule ainsi un degré de liberté dans le mouvement $3/0$. Le porte-préhenseur est entièrement mis en position par rapport au bâti grâce aux six tiges et on imagine alors cette structure isostatique.

6. Le graphe des liaisons de la sous-structure étudiée comporte une chaîne fermée de quatre solides



On a à traiter un système de 6 équations à 12 inconnues :

$$\mathcal{V}(2/1) =_A \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/2) =_B \begin{cases} \vec{\Omega}(3/2) \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{V}(4/1) =_D \begin{cases} \vec{\Omega}(4/1) \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/4) =_C \begin{cases} \vec{\Omega}(3/4) \\ \vec{0} \end{cases}$$

La composition des vitesses au point D scalaire \vec{DC} évite les six inconnues de $\mathcal{V}(3/4)$ et de $\mathcal{V}(4/1)$

$$\left(\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{AD} \right) \cdot \vec{DC} + \left(\vec{\Omega}(3/2) \wedge \vec{BD} \right) \cdot \vec{DC} = 0$$

Les propriétés du produit mixte, ainsi que les changements de chemin $\vec{DC} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD}$ permettent d'écrire

$$\left(\vec{AD} \wedge (\vec{AB} + \vec{BC}) \right) \cdot \vec{\Omega}(2/1) + \left(\vec{BC} \wedge \vec{DC} \right) \cdot \vec{\Omega}(3/2) = 0$$

Dans toute position initiale pour laquelle $ABCD$ est un parallélogramme, on a

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{BC} \\ \vec{AB} &= \vec{DC} \end{aligned}$$

Quand le parallélogramme n'est pas écrasé, le produit vectoriel $\vec{AD} \wedge \vec{AB}$ n'est pas nul et peut alors être mis en facteur. La composition des mouvements permet alors de conclure

$$\left(\vec{AD} \wedge \vec{AB} \right) \cdot \vec{\Omega}(3/1) = 0$$

Cette équation signifie que le fait d'avoir un parallélogramme annule une possibilité de rotation dans le mouvement 3/1.

3.5 Barrière Sinusmatic

1. Ce mécanisme est constitué d'une chaîne fermée de quatre solides

Ce mécanisme comporte 7 inconnues cinématiques pour 6 équations, soit un indice de mobilité $I_c - E_c = 1$. Il comporte donc au moins un mouvement possible.

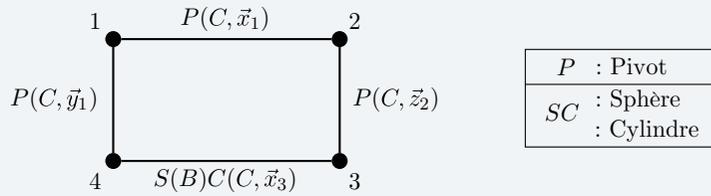
$$\begin{cases} m - h = 1 \\ m \geq 1 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Torseurs cinématiques et variables associées

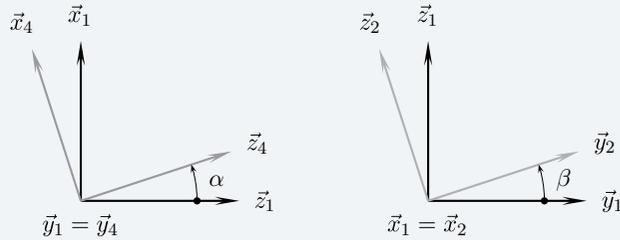
Les quatre mouvements associés aux quatre arcs du graphe précédent sont à caractériser

$$\mathcal{V}(4/1) =_C \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(2/1) =_C \begin{cases} \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{V}(3/2) =_C \begin{cases} \dot{\omega}_{32} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(4/3) =_B \begin{cases} \vec{\Omega}(4/3) \\ \dot{\lambda} \vec{x}_3 \end{cases}, \text{ avec } \vec{CB} = \lambda \vec{x}_3$$



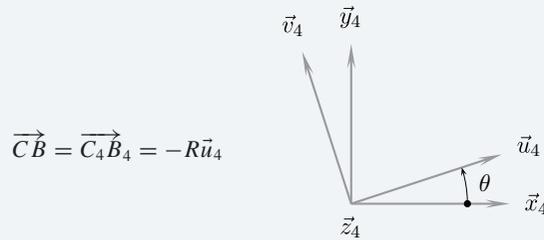
On complète cet inventaire en traçant les figures de calcul pour les deux angles α et β



Invariants géométriques

- bâti 1
→ 2 demi-droites perpendiculaires et sécantes au point C_1 ;
- fourche 2
→ 2 demi-droites perpendiculaires et sécantes au point C_2 ;
- croisillon 3
→ 2 demi-droites perpendiculaires et sécantes au point C_3 ;
- arbre 4
→ 1 demi-droite, choisie issue du point C_4 , et le point B .

La position relative de ces deux derniers points est caractérisée par le vecteur



Remarque : Le vecteur \vec{CB} défini par l'énoncé est donc un invariant sur l'arbre 4, à ne pas confondre avec le vecteur position du point B dans le mouvement 4/3, défini lors de l'écriture du torseur $\mathcal{V}(4/3)$ par $\vec{CB} = \vec{C}_3\vec{B}_4 = \lambda\vec{x}_3$.

2. La loi entrée-sortie recherchée est issue de la fermeture cinématique sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 4 – 1 et concerne deux inconnues parmi les sept dénombrées :

- l'équation de composition des vitesses au point B évite les trois inconnues du vecteur rotation $\vec{\Omega}(4/3)$;
- cette même équation scalaire \vec{z}_3 évite les deux inconnues ω_{32} et $\dot{\lambda}$.

La loi entrée-sortie s'écrit alors

$$(\dot{\alpha}\vec{y}_1 \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{z}_3 = (\dot{\beta}\vec{x}_1 \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{z}_3$$

On choisit comme description $\vec{CB} = -R\vec{u}_4$, choix qui sera justifiée à la question 5.

Par substitution et comme la longueur R est non nulle, on obtient l'égalité des produits mixtes

$$\dot{\alpha} \underbrace{(\vec{y}_1, \vec{u}_4, \vec{z}_2)}_{(a)} = \dot{\beta} \underbrace{(\vec{x}_1, \vec{u}_4, \vec{z}_2)}_{(b)}$$

On s'appuie sur les figures de calcul pour détailler les deux produits mixtes :

- concernant le terme (a)

$$\begin{aligned}(\vec{y}_1 \wedge \vec{u}_4) \cdot \vec{z}_2 &= (\vec{y}_4 \wedge \vec{u}_4) \cdot \vec{z}_2 \\ &= -\cos \theta \vec{z}_4 \cdot \vec{z}_2 \\ &= -\cos \theta (\cos \alpha \vec{z}_1 + \sin \alpha \vec{x}_1) \cdot \vec{z}_2 \\ &= -\cos \theta \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

- le second terme (b) demande un traitement analogue

$$\begin{aligned}(\vec{x}_1 \wedge \vec{u}_4) \cdot \vec{z}_2 &= (\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1) \cdot \vec{u}_4 \\ &= \vec{y}_2 \cdot \vec{u}_4 \\ &= (\cos \beta \vec{y}_1 + \sin \beta \vec{z}_1) \cdot (\cos \theta \vec{x}_4 + \sin \theta \vec{y}_4) \\ &= \cos \beta \sin \theta - \sin \beta \cos \theta \sin \alpha\end{aligned}$$

Ce qui donne, après arrangement :

$$\dot{\beta} = -\dot{\alpha} \frac{\cos \alpha}{\tan \theta - \sin \alpha \tan \beta} \quad (1)$$

3. L'équation différentielle (1) trouvée n'est pas à variables séparées, ce qui pose souci pour son intégration. Pour choisir parmi les solutions proposées, la disposition suivante est intéressante

$$\tan \theta \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\tan \theta} \tan \beta \right) \dot{\beta} = -\cos \alpha \dot{\alpha}$$

En effet, elle permet de deviner la solution

$$\tan \beta = -\frac{\sin \alpha}{\tan \theta} \quad (2)$$

4. L'angle α varie de 0 à 2π , donc son sinus varie de -1 à $+1$ et $\tan \beta$ varie de $-1/\tan \theta$ à $+1/\tan \theta$. Une amplitude de 90° est obtenue pour β variant donc de -45° à $+45^\circ$, ce qui est obtenu lorsque $\tan \theta$ vaut 1, soit pour θ égal à 45° .

$$\theta = 45^\circ \quad (3)$$

5. Sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 4 – 1, l'équation de composition des vitesses au point B scalaire $\vec{C}\vec{B}$ donne

$$\dot{\lambda} \vec{x}_3 \cdot \lambda \vec{x}_3 = 0$$

La longueur λ n'étant pas nulle, on en déduit que le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 4/3)$ est nul.

De même, l'équation de composition des vitesses au point C donne

$$\vec{\Omega}(4/3) \wedge \vec{C}\vec{B} = \vec{0}$$

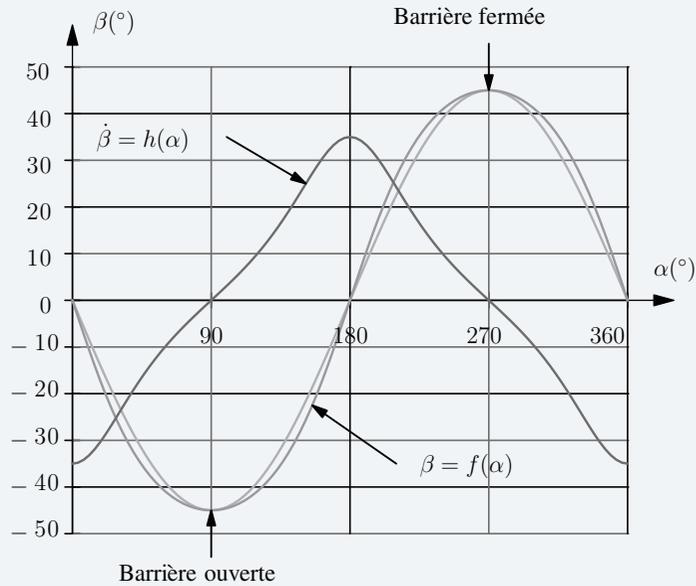
Les deux vecteurs n'étant pas nuls à chaque instant, on en déduit que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(4/3)$ est porté par \vec{x}_3 .

$$\vec{\Omega}(4/3) = \omega_{43} \vec{x}_3$$

6. Ces deux derniers calculs permettent d'affirmer qu'entre les pièces 3 et 4, une liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_3) est suffisante pour obtenir le fonctionnement souhaité. Mais l'indice de mobilité d'une telle structure est alors de -2 , et cette dernière est en conséquence hyperstatique, ce qui n'a aucune raison d'être souhaité ici.

7. Les positions barrière ouverte et fermée sont obtenues respectivement pour $\alpha = 90^\circ$ et pour $\alpha = 270^\circ$, comme indiqué sur la figure suivante.

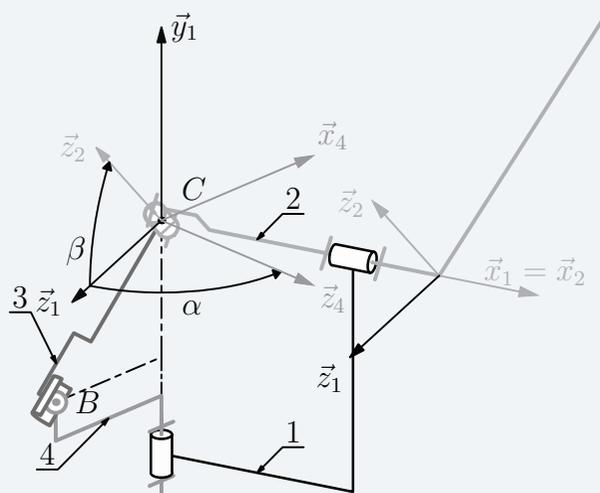
8. Une phase d'ouverture ou de fermeture est obtenue pour un demi-tour de l'arbre moteur 4, ce demi-tour étant exécuté en 3,5 s, ce qui suppose une fréquence de rotation uniforme de l'arbre moteur de 8,57 tr/min.



On complète la figure ci-dessus pour superposer les deux courbes, sachant que pour $\theta = 45^\circ$, on a comme expression

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

9. Un schéma cinématique en perspective est représenté sur la figure suivante, dans une position intermédiaire.



10. Autant l'affirmation « sans choc aux extrémités » peut être justifiée à la vue des courbes données, autant l'appréciation de la durée de manœuvre est subjective, et ne peut être commentée.

On rappelle qu'un choc se traduit par une discontinuité sur la courbe en accélération, donc par des points anguleux sur la courbe en vitesse.

11. Une étude dynamique systématique conduit à l'écriture de 18 équations et on dénombre 17 inconnues de liaison, auxquelles s'ajoutent les couples résistant et moteur. Dans le cas d'une structure isostatique, la résolution est possible.

12. On s'intéresse aux seuls équilibres d'ensembles de solides dénombrés à partir de l'ensemble des pièces mobiles $\{2, 3, 4\}$. Ces équilibres sont envisagés par rapport au bâti supposé galiléen.

On note dans le tableau ci-dessous I_s le nombre d'inconnues scalaires de liaison, et I_{ext} les inconnues C_m et C_r .

$\Sigma/1$	$\bar{\Sigma}$	I_s	I_{ext}	Commentaire
2/1	Bâti Croisillon Récepteur	10	C_r	
3/1	Fourche Arbre	7	0	Équation de moment au point C scalaire \vec{z}_3
4/1	Bâti Croisillon Moteur	7	C_m	Équation de moment au point C scalaire \vec{y}_1
{2,3}/1	Bâti Arbre Récepteur	7	C_r	Équation de moment au point C scalaire \vec{x}_1
{2,4}/1	Bâti Croisillon Récepteur Moteur	17	C_m, C_r	Aucun intérêt
{3,4}/1	Bâti Fourche Moteur	10	C_m	
{2,3,4}/1	Bâti Récepteur Moteur	10	C_m, C_r	

Parcourir la chaîne fermée de solides nécessite d'étudier trois équilibres. Il peut être judicieux de choisir une stratégie permettant d'éviter les 15 inconnues des liaisons pivot. Dans ce cas, on extrait du système de 18 équations à 19 inconnues un sous-système de 3 équations à 4 inconnues.

Les trois équations correspondantes sont ainsi proposées dans le tableau.

13. On s'intéresse aux trois équations proposées dans le tableau ci-dessus.

• **Équilibre de 3 par rapport à 1**

On retient comme actions mécaniques extérieures pour $\bar{3} \rightarrow 3$:

– la fourche $2 \rightarrow 3$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(C, 2 \rightarrow 3) \perp \vec{z}_3 \end{cases}$$

– l'arbre moteur $4 \rightarrow 3$

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = {}_B \begin{cases} \vec{R}(4 \rightarrow 3) \perp \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation de moment au point C scalaire \vec{z}_3 évite les cinq inconnues de la liaison pivot et il reste

$$\left(\vec{R}(4 \rightarrow 3) \wedge \vec{BC} \right) \cdot \vec{z}_3 = 0$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, on écrit

$$\left(\vec{z}_3 \wedge \vec{R}(4 \rightarrow 3) \right) \cdot \vec{BC} = 0$$

Le vecteur $\vec{R}(4 \rightarrow 3)$ étant orthogonal à \vec{x}_3 , le produit vectoriel $\vec{z}_3 \wedge \vec{R}(4 \rightarrow 3)$ est suivant \vec{BC} ; le produit scalaire ne peut donc être nul que si le produit vectoriel est nul.

On en déduit

$$\vec{R}(4 \rightarrow 3) = F_{43} \vec{z}_3$$

• **Équilibre de 4 par rapport à 1**

On retient comme actions mécaniques extérieures pour $\overline{4} \rightarrow 4$:

– le bâti $1 \rightarrow 4$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(C, 1 \rightarrow 4) \perp \vec{y}_1 \end{cases}$$

– le croisillon $3 \rightarrow 4$

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{cases} -F_{43} \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{cases}$$

– le moteur $m \rightarrow 4$

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_1 \end{cases}$$

L'équation de moment au point C scalaire \vec{y}_1 évite les cinq inconnues de la liaison pivot et il reste

$$\left(-F_{43} \vec{z}_3 \wedge \vec{BC} \right) \cdot \vec{y}_1 + C_m = 0 \quad (4)$$

• **Équilibre de {2, 3} par rapport à 1**

On retient comme actions mécaniques extérieures pour $\overline{\{2,3\}} \rightarrow \{2,3\}$:

– le bâti $1 \rightarrow 2$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(C, 1 \rightarrow 2) \perp \vec{x}_1 \end{cases}$$

– l'arbre moteur $4 \rightarrow 3$

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = \begin{cases} F_{43} \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{cases}$$

– le récepteur $r \rightarrow 2$

$$\mathcal{F}(r \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_r \vec{x}_1 \end{cases}$$

L'équation de moment au point C scalaire \vec{x}_1 évite les cinq inconnues de la liaison pivot et il reste

$$\left(F_{43} \vec{z}_3 \wedge \vec{BC} \right) \cdot \vec{x}_1 + C_r = 0 \quad (5)$$

Les produits mixtes des équations (4) et (5) ont été calculés à la question 2. On reprend ces résultats et on trouve

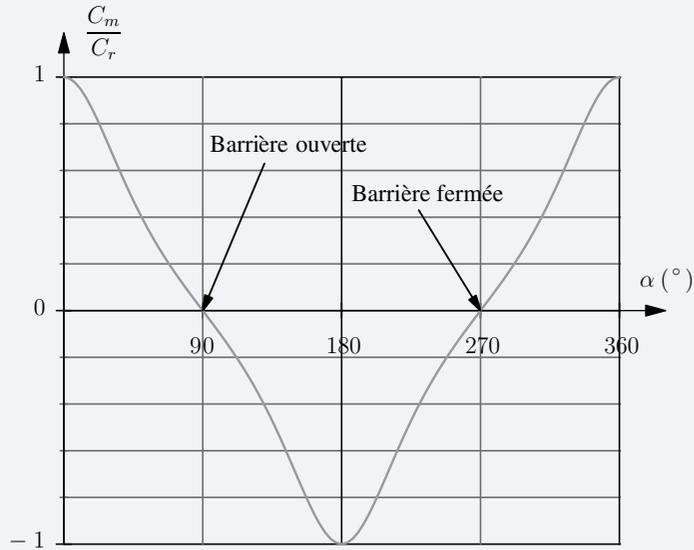
$$C_m = C_r \frac{\cos \alpha \tan \theta}{\sin \alpha \tan \beta - \tan \theta}$$

La loi géométrique de l'équation (2) permet de terminer le calcul

$$C_m = C_r \frac{\cos \alpha \tan \theta}{\sin^2 \alpha + \tan^2 \theta} \quad (6)$$

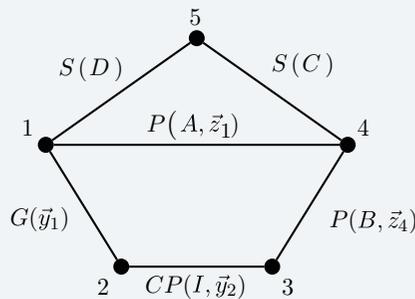
14. Allure de la courbe C_m/C_r en fonction de l'angle α pour $\theta = 45^\circ$, tracée page suivante.

15. Sur la courbe précédente, on constate que pour les deux positions ouverte et fermée, un couple moteur nul convient pour assurer l'équilibre de l'ensemble. Cela traduit l'irréversibilité du mécanisme pour les positions ouverte et fermée de la barrière.



3.6 Train d'atterrissage

1. On commence par tracer le graphe de structure, complété des liaisons et du contact



$P(axe)$	Pivot d'axe (axe)
$G(vec)$	Glissière de direction (vec)
$S(pt)$	Sphérique de centre (pt)
$CP(pt, vec)$	Contact ponctuel en (pt) de normale (vec)

Les modèles proposés induisent 14 degrés de liberté, soit 14 variables cinématiques.

Les invariants géométriques sont identifiés sur les solides à partir des caractéristiques géométriques induites par les liaisons et le contact :

- le bâti 1 comporte une demi-droite, un point, distant de la longueur d , et une direction perpendiculaire au plan généré par les deux éléments précédents ;
- sur le coulisseau 2 est défini l'angle β , entre les deux directions caractéristiques ;
- la roue 3 est caractérisée par un cercle de rayon R et d'axe une demi-droite ;
- la jambe 4 comporte deux demi-droites parallèles distantes de b et un point localisé par le vecteur \overrightarrow{BC} ;
- la contre-fiche 5 est caractérisée par deux points distants de la longueur L .

Les lois entrée-sortie feront *a priori* intervenir les longueurs L, R, a, b, c, d et l'angle β .

2. Ce mécanisme comporte deux chaînes fermées indépendantes de solides, ce qui donne lors d'une approche cinématique 12 équations scalaires pour 14 inconnues de liaisons, soit un indice de mobilité de 2

$$\begin{cases} m - h = 2 \\ m \geq 2 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

On a ainsi au moins deux mouvements à imaginer :

- la rotation de la contre-fiche 5 par rapport au bâti 1 autour de l'axe (DC) ;
- la rotation de la roue 3 par rapport à la jambe 4.

Les deux liaisons sphériques autorisent un montage sans souci sur la chaîne fermée 1 – 5 – 4 – 1, cette dernière réalisant une structure rigide, et il n'y a aucune contrainte pour obtenir le contact au point I sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 4 – 1.

On suppose ainsi la structure isostatique, les deux mouvements possibles laissant la structure globalement invariante et pouvant s'interpréter comme des degrés de mobilité internes.

3. Une approche dynamique induit quant à elle un système de 24 équations à 22 inconnues de liaison, augmentées pour cette étude de l'inconnue F correspondant à l'effort de poussée.

Comme deux équations correspondent *a priori* aux degrés de mobilité internes et ne servent alors à rien pour cette étude, on a donc à traiter un système de 22 équations à 23 inconnues, et dans l'hypothèse d'une structure isostatique, on peut déterminer toutes les 22 inconnues de liaison en fonction de F :

- déterminer les efforts dans la contre-fiche 5 revient à rechercher les valeurs des six inconnues des deux liaisons sphériques. Il faut six équations scalaires pour cela ;
- parcourir les quatre équilibres est *a priori* nécessaire, avec au minimum une équation scalaire par équilibre.

Apparaît alors la possibilité de traiter ce problème avec 9 équations scalaires sur les 24 disponibles. Ne pas avoir à traiter les 15 équations restantes est possible en évitant 15 inconnues scalaires de liaison. On propose alors la stratégie suivante :

- équilibre de 5/1 ;
- équilibre de 3/1 : équation de moment au point B scalaire \bar{z}_2 afin d'éviter les 5 inconnues de la liaison pivot entre 3 et 4 ;
- équilibre de 2/1 : équation de résultante scalaire \bar{y}_1 afin d'éviter les 5 inconnues de la liaison glissière entre 2 et 1 ;
- équilibre de {3, 4}/1 : équation de moment au point A scalaire \bar{z}_1 afin d'éviter les 5 inconnues de la liaison pivot entre 4 et 1 ;

Les deux équations ne servant à rien sont *a priori* dans cet ensemble de neuf équations.

Équilibre de 5/1

Inventaire du milieu environnant

Deux actions mécaniques extérieures sont à considérer, $1 \rightarrow 5$ et $4 \rightarrow 5$, et on pose les torseurs correspondants

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 5) =_D \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 5) \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 5) =_C \begin{cases} \vec{R}(4 \rightarrow 5) \\ \vec{0} \end{cases}$$

Résolution

Les deux glisseurs sont opposés, et l'équation de moment au point D permet d'écrire

$$\vec{R}(4 \rightarrow 5) \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

La contre-fiche est sollicitée en traction-compression et on pose

$$\vec{R}(4 \rightarrow 5) = k \overrightarrow{DC}$$

On remarque que ce système homogène de six équations scalaires à six inconnues n'est pas de rang égal à six.

La première des deux équations scalaires inutiles est l'équation de moment au point D scalaire \overrightarrow{DC} , de la forme $0 = 0$, et correspond bien au premier des deux degrés de mobilité !

Équilibre de 3/1

Inventaire du milieu environnant

Deux actions mécaniques extérieures sont à considérer, $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 3$, et on pose les torseurs correspondants

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) =_I \begin{cases} Y_{23} \vec{y}_2, \text{ avec } Y_{23} \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = \begin{cases} \vec{R}(4 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(B, 4 \rightarrow 3) \perp \bar{z}_3 \end{cases}$$

Résolution

L'équation de moment au point B scalaire \vec{z}_3 évite les 5 inconnues du torseur $\mathcal{F}(4 \rightarrow 3)$ et s'écrit

$$\underbrace{\left(Y_{23} \vec{y}_2 \wedge \vec{BI} \right)}_{=\vec{0}} \cdot \vec{z}_3 = 0$$

Cette équation est également de la forme $0 = 0$, et correspond au second des deux degrés de mobilité !

Équilibre de 2/1

Inventaire du milieu environnant

Trois actions mécaniques extérieures sont à considérer, $3 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 2$ et $v \rightarrow 2$, et on pose les torseurs correspondants

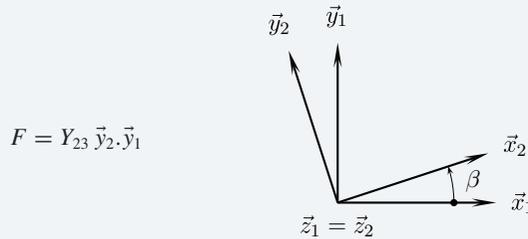
$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} -Y_{23} \vec{y}_2, & \text{avec } Y_{23} \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \perp \vec{y}_1 \\ \vec{M}(I, 1 \rightarrow 2) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 2) = \begin{cases} F \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Résolution

L'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 évite les 5 inconnues du torseur $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ et s'écrit



On obtient alors comme premier résultat

$$Y_{23} = \frac{F}{\cos \beta} \quad (1)$$

Équilibre de {3 + 4}/1

Inventaire du milieu environnant

Trois actions mécaniques extérieures sont à considérer, $1 \rightarrow 4$, $5 \rightarrow 4$ et $2 \rightarrow 3$, et on pose les torseurs correspondants

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 4) \perp \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(5 \rightarrow 4) = \begin{cases} k \vec{DC} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} Y_{23} \vec{y}_2 & \text{avec } Y_{23} = \frac{F}{\cos \beta} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Résolution

L'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_1 évite les 5 inconnues de $\mathcal{F}(1 \rightarrow 4)$ et s'écrit

$$\left(k \vec{DC} \wedge \vec{CA} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left(Y_{23} \vec{y}_2 \wedge \vec{IA} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (2)$$

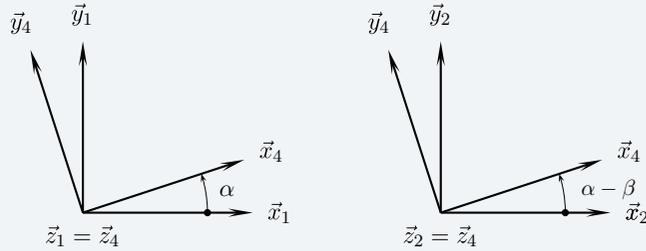
Il reste à développer les deux produits mixtes :

• on exploite $\vec{DC} = \vec{DA} + \vec{AC}$ pour écrire

$$\begin{aligned}\vec{DC} \wedge \vec{CA} &= \vec{DA} \wedge \vec{CA} \\ &= d\vec{x}_1 \wedge ((b-a)\vec{x}_4 + c\vec{y}_4) \\ &= (d(b-a)\sin\alpha + dc\cos\alpha)\vec{z}_1\end{aligned}$$

• on exploite $\vec{IA} = \vec{IB} + \vec{BA}$ pour écrire

$$\begin{aligned}\vec{y}_2 \wedge \vec{IA} &= \vec{y}_2 \wedge \vec{BA} \\ &= \vec{y}_2 \wedge b\vec{x}_4 \\ &= -b\cos(\alpha - \beta)\vec{z}_4\end{aligned}$$



On remplace les termes dans l'équation 2 pour proposer

$$k = Y_{23} \frac{b\cos(\alpha - \beta)}{d(b-a)\sin\alpha + dc\cos\alpha} \quad (3)$$

les deux équations 1 et 3 permettent de conclure

$$k = F \frac{b\cos(\alpha - \beta)}{(d(b-a)\sin\alpha + dc\cos\alpha)\cos\beta} \quad (4)$$

4. Considérer le phénomène de frottement au point de contact I ne change rien à l'évaluation du statisme de cette structure. Par contre, cela ajoute deux inconnues scalaires que l'on explicite lors de l'équilibre de 3/1.

Équilibre de 3/1

Inventaire du milieu environnant

Deux actions mécaniques extérieures sont à considérer, $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 3$, et on pose les torseurs correspondants

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} Y_{23}\vec{y}_2 + \vec{T}_{23} \\ \vec{0} \end{cases} \text{ avec } Y_{23} \geq 0, \vec{T}_{23} \cdot \vec{y}_2 = 0 \text{ et } \frac{\|\vec{T}_{23}\|}{Y_{23}} \leq f$$

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = \begin{cases} \vec{R}(4 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(B, 4 \rightarrow 3) \perp \vec{z}_3 \end{cases}$$

Résolution

L'équation de moment au point B scalaire \vec{z}_3 évite les 5 inconnues du torseur $\mathcal{F}(4 \rightarrow 3)$ et s'écrit

$$(\vec{T}_{23} \wedge \vec{BI}) \cdot \vec{z}_3 = 0$$

On exploite les propriétés du produit mixte pour écrire

$$-(\vec{T}_{23} \wedge R\vec{y}_2) \cdot \vec{z}_3 = -R \underbrace{(\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_3)}_{=\vec{x}_2} \cdot \vec{T}_{23}$$

On en déduit

$$\vec{T}_{23} \cdot \vec{x}_2 = 0$$

Il n'y a pas de composante d'action mécanique au point I suivant \vec{x}_2 . Par contre, la composante suivant \vec{z}_2 reste indéterminée.

Plan

Les méthodes à retenir	109
Énoncés des exercices	110
Du mal à démarrer ?	120
Corrigés	121

Thèmes abordés dans les exercices

- caractériser masse et répartition de la masse
- éviter des phénomènes tels que le glissement ou la rupture du contact lorsque ce n'est pas souhaité
- évaluer une composante d'action mécanique particulière
- rechercher une loi de mouvement

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- masse, centre de masse
- répartition de la masse autour d'une droite : moment d'inertie
- répartition de la masse autour d'un point : opérateur d'inertie
- principe fondamental de la dynamique
- théorèmes énergétiques
- dénombrer équations et inconnues
- techniques de résolution des problèmes

Les méthodes à retenir

Pour déterminer la position d'un centre de masse

- Paramétrer la position du point courant.
- Exploiter les propriétés d'un barycentre.

➔ Exercices 4.1, 4.2

Pour caractériser la répartition de la masse

- Exploiter les symétries géométriques.
- Décrire les solides comme ensembles de formes simples.
- Utiliser un modeleur volumique.

➔ Exercices 4.1, 4.3

Pour évaluer le maintien d'un contact

- Caractériser les actions mécaniques au niveau du contact.
- Évaluer les quantités d'accélération.

➔ Exercice 4.4, 4.7

Pour calculer inertie ou action mécanique équivalente

- S'appuyer sur le théorème de l'énergie cinétique.
- Évaluer chacun des termes de manière rigoureuse et systématique.

➔ Exercices 4.5, 4.6

Énoncés des exercices

4.1 Tige

On s'intéresse aux caractéristiques d'inertie d'une tige T homogène, de masse m et de longueur L . On pose $\vec{AB} = L\vec{x}$.

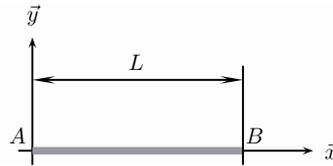


Figure 4.1 – Modélisation géométrique de la tige

1. Déterminer la position du centre de masse G de la tige.
2. Déterminer l'expression du moment d'inertie I_{Ay} .
3. Déterminer l'expression du moment d'inertie I_{Gy} de deux manières différentes.
4. Donner l'allure de la matrice associée à l'opérateur d'inertie au point A , noté $\bar{\bar{I}}(A, T)$.

On considère de plus un point C de coordonnées (a, b, c) dans le repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

5. Déterminer l'expression matricielle de l'opérateur d'inertie $\bar{\bar{I}}(C, T)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

On considère maintenant un axe (Δ) passant par le point A

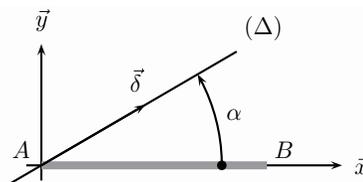


Figure 4.2 – Changement d'orientation de la tige

6. Déterminer l'expression du moment d'inertie $I_{A\delta}$.

4.2 Calotte sphérique

On s'intéresse au moulage d'une calotte sphérique, constituée d'une demi-boule homogène de rayon R , évidée d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h , telle que représentée en coupe figure 4.3.

- L'axe du cylindre de révolution creux coïncide avec l'axe de révolution de la demi-sphère.
- Le centre de masse d'une demi-sphère pleine de masse m est à une distance $\frac{3}{8}R$ de la base plane.

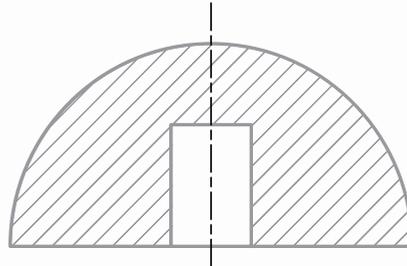


Figure 4.3 – Vue en coupe de la demi sphère évidée

1. Paramétrer la pièce étudiée.
2. Calculer la hauteur h du trou pour que le centre de gravité de l'ensemble soit situé au centre de symétrie du trou.

4.3 Malaxeur

On s'intéresse aux caractéristiques d'inertie de la partie de l'arbre d'un malaxeur en contact avec un fluide à mélanger. Cette partie, représentée figure 4.4, est constituée de trois segments homogènes (1), (2) et (3) en forme de U ; on lui associe un repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Elle est par ailleurs en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) avec le bâti.

La masse totale des trois segments est notée m et les deux longueurs caractéristiques a et h sont cotées sur la figure ci-dessous.

Pour les trois premières questions, on ne considère que ces trois seuls segments. Ils constituent le solide étudié, que l'on note S .

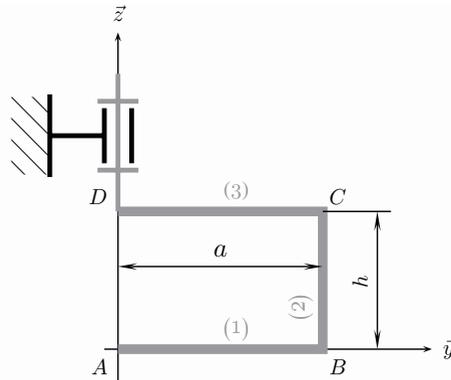


Figure 4.4 – L'axe tournant d'un malaxeur en forme de U

1. Déterminer la position du centre de masse G de la partie S étudiée.
2. Donner l'allure de la matrice associée à l'opérateur d'inertie au point A , noté $\bar{\bar{I}}(A, S)$.
3. Déterminer les expressions des termes non nuls de la matrice précédente.

Pour éviter les balourds et les soucis de vibration lors de la rotation de l'arbre par rapport au bâti autour de l'axe (A, \vec{z}) , on complète le motif précédent par symétrie axiale d'axe (A, \vec{x}) , de manière à ce que le centre de masse G soit sur l'axe de rotation et en souhaitant que ce dernier soit axe principal d'inertie. Le solide S comporte à présent cinq segments, représentés figure 4.5.

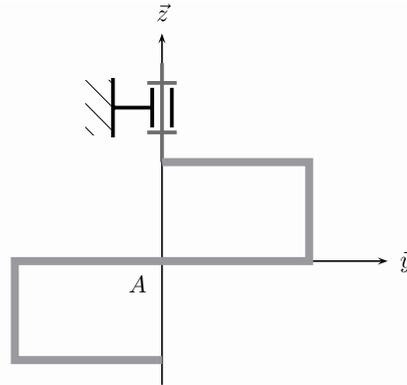


Figure 4.5 – Un axe plus équilibré ?

4. Déterminer les nouvelles expressions des moments d'inertie de l'opérateur d'inertie $\bar{\bar{I}}(A, S)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
5. L'axe de rotation (A, \vec{z}) est-il un axe principal d'inertie ? Dans le cas d'une réponse négative, proposer au moins une nouvelle évolution du motif de manière à l'obtenir ainsi, tout en conservant le centre de masse sur cet axe.

4.4 Convoyeur

Soit un convoyeur à bande, de boîtes ou de bouteilles, tel que schématisé sur la figure 4.6. En fonctionnement normal, la vitesse de défilement est constante et les objets déplacés sont entraînés par adhérence.

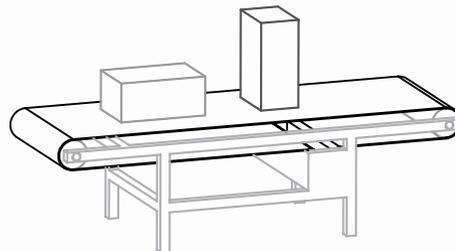


Figure 4.6 – Deux boîtes sur un convoyeur à bande

La mise en route et l'arrêt du convoyeur peuvent poser souci, comme on le visualise par l'expérience ci-dessous.

Expérimentation

Faire l'expérience avec une boîte parallélépipédique posée sur un livre ou une pochette que l'on tire plus ou moins violemment sur un plan horizontal et constater les deux phénomènes, glissement ou basculement de la boîte par rapport à la pochette, en fonction de l'orientation initiale de la boîte, respectivement couchée ou debout.

Constater ces phénomènes possibles à la mise à l'arrêt comme à la mise en mouvement.

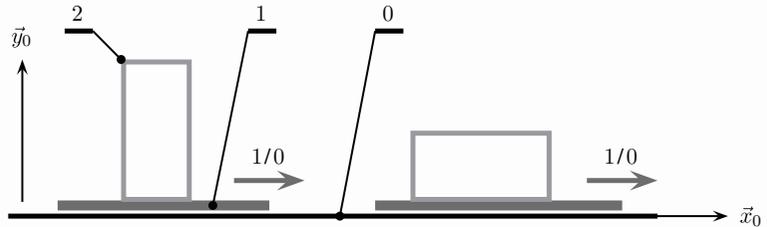


Figure 4.7 – Modélisation géométrique dans un plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0)

1. Caractériser le mouvement 1/0 imposé au convoyeur.
2. Autour de quelle ligne la boîte bascule-t-elle éventuellement lors de l'accélération ?
3. Quel est le mouvement souhaité de la boîte par rapport au convoyeur ?

Modélisation

On suppose la boîte 2 de largeur a , de hauteur h , de masse m , homogène et de centre de masse G .

Le frottement au contact entre le convoyeur et la boîte est caractérisé par le coefficient f .

On se restreint au problème plan, dans un espace à trois degrés de liberté.

4. Caractériser le contact entre la boîte et le convoyeur.
5. Exprimer et détailler le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement de la boîte 2 par rapport au bâti 0 supposé galiléen.
6. En supposant les lois du frottement applicables à la résultante du torseur $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$, déterminer l'accélération maximale possible sans glissement de la boîte par rapport au convoyeur.
7. Exprimer la condition de non-basculement de la boîte, et en déduire l'accélération maximale possible sans basculement de la boîte par rapport au convoyeur.
8. Conclure.

4.5 Positionneur angulaire

On considère le mécanisme représenté sur la figure 4.8. Il permet d'orienter un objet sur un plan horizontal repéré 1, de normale \vec{z}_1 .

Il comprend principalement quatre ensembles : un châssis 2 et trois roues motorisées identiques 3, 4 et 5, les trois axes de rotation étant radiaux et disposés de façon symétrique, tous les 120° .

- Le châssis 2 est de masse m_2 , de centre de masse G , et on lui associe un repère $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. La répartition de sa masse est caractérisée par

$$\bar{\mathbb{I}}(G, 2) = \begin{bmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

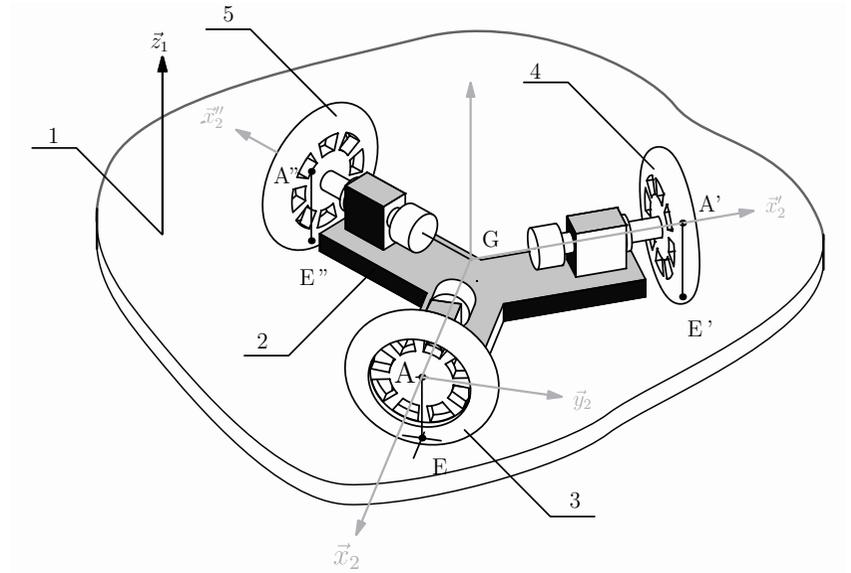


Figure 4.8 – Architecture du positionneur angulaire à trois roues

On pose $\vec{GA} = L\vec{x}_2$.

- La roue 3 est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_2) avec le châssis 2. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et on pose $\gamma = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

Cette roue est de rayon R , de masse m_3 et de centre d'inertie A . La répartition de sa masse est caractérisée par

$$\bar{I}(A,3) = \begin{bmatrix} J_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

On fait les hypothèses suivantes :

- les trois roues roulent sans glisser sur le sol aux points respectifs E , E' et E'' , avec $\vec{AE} = -R\vec{z}_2$;
- les trois roues ont à chaque instant des vitesses de rotation par rapport au châssis égales, que l'on note $\omega_m = \dot{\gamma}$;
- ce dispositif permet d'obtenir un mouvement du châssis par rapport au sol qui se réduit à une rotation d'axe $(G, \vec{z}_2) = (G, \vec{z}_1)$, caractérisée par l'angle $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

1. Exprimer les torseurs cinématiques $\mathcal{V}(2/1)$ et $\mathcal{V}(3/2)$ en fonction de L , R et $\dot{\theta}$.
2. Exprimer l'énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport au repère 1, notée $E(2/1)$.
3. Exprimer l'énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport au repère 1, notée $E(3/1)$.

On considère le système Σ constitué du châssis et des trois roues.

4. Exprimer l'énergie cinétique du système Σ dans son mouvement par rapport au repère 1, notée $E(\Sigma/1)$.

La dynamique du positionnement requiert l'équation différentielle liant l'angle θ au couple moteur. On complète alors la modélisation proposée :

- La pesanteur est caractérisée par $\vec{g} = -g\vec{z}_1$.
- Le contact roue-sol est supposé ponctuel, caractérisé par le coefficient de frottement f et tel que pour la roue 3 :

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 3) = \begin{matrix} E \\ 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} (\frac{1}{3}m_2 + m_3)g\vec{z}_1 + T\vec{y}_2 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

Pour les deux autres roues, la symétrie conduit aux mêmes valeurs de T .

- Les liaisons pivot sont parfaites.
 - Le moteur de la roue 3 est tel que le stator, qui fait partie du châssis 2, exerce sur le rotor lié à la roue 3 une action électromagnétique caractérisée par un couple de moment C_m ; il en est de même pour les deux autres roues.
4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système Σ dans son mouvement par rapport au sol 1 supposé galiléen. En déduire l'équation différentielle cherchée, exprimée en fonction des paramètres d'inertie des solides, des grandeurs géométriques R et L , et des dérivées successives de l'angle θ .
 5. Expliquer clairement, sans faire les calculs, la démarche à suivre pour déterminer l'accélération angulaire maximale possible, sans glissement des trois roues sur le sol.

4.6 Axe électrique

Objectifs

Recherche de l'inertie et du couple résistant d'un modèle équivalent.

Mécanisme étudié

Soit un système mécanique de type « axe électrique », modélisé sur la figure 4.9.

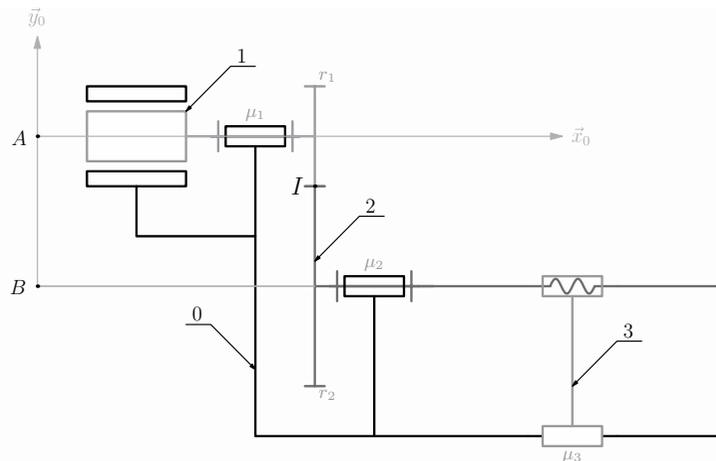


Figure 4.9 – Axe électrique

Ce mécanisme est composé de quatre ensembles.

- Un bâti 0 :
 - lui est associé le repère $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen ;
 - le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, avec $g > 0$.

- Un arbre moteur 1 :
 - cet arbre est lié au bâti 0 par une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0) *imparfaite*, de coefficient de frottement visqueux μ_1 ;
 - on lui attache le repère $R_1(A, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
 - cet arbre a une inertie J_m par rapport à l'axe de rotation (A, \vec{x}_0) ;
 - on fixe à son extrémité un pignon de rayon r_1 et d'inertie $I_1 = \vec{x}_0 \cdot \bar{\bar{I}}(A, 1) (\vec{x}_0)$;
 - le centre de masse de l'ensemble {moteur, 1} est sur l'axe de rotation (A, \vec{x}_0) . Soit m_1 sa masse.
- Un arbre intermédiaire 2 :
 - cet arbre est lié au bâti 0 par une liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_0) *imparfaite*, de coefficient de frottement visqueux μ_2 ;
 - on fixe à son extrémité un pignon de rayon r_2 et d'inertie $I_2 = \vec{x}_0 \cdot \bar{\bar{I}}(B, 2) (\vec{x}_0)$, afin de former avec le pignon 1 un réducteur de rapport de réduction R ;
 - le centre de masse de l'ensemble {arbre intermédiaire 2, pignon 2} est sur l'axe de rotation (B, \vec{x}_0) . Soit m_2 sa masse.
- Un chariot 3 :
 - cet ensemble, de masse m_3 , est en liaison glissière *imparfaite* de direction \vec{x}_0 avec le bâti 0, de coefficient de frottement visqueux μ_3 .
 - il est également en liaison hélicoïdale d'axe (A, \vec{x}_0) et de pas p avec l'arbre intermédiaire 2.

On pose le modèle d'action mécanique du récepteur r sur la pièce 3, ainsi que le modèle d'action mécanique du moteur m sur l'arbre 1

$$\mathcal{F}(r \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} F \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(m \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

Modèle équivalent

On pose comme modèle équivalent à ce mécanisme une seule pièce 1_{eq} en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0) avec le bâti, comme montré sur la figure 4.10.

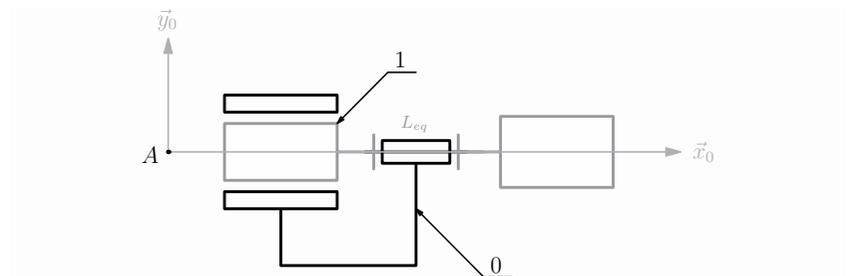


Figure 4.10 – Le modèle équivalent

La liaison équivalente entre 0 et 1 est parfaite.

On suppose que le centre de masse de la pièce 1_{eq} se trouve sur l'axe (A, \vec{x}_0) .

On pose :

- le moment d'inertie de la pièce équivalente 1_{eq} ;

$$J_{eq} = \vec{x}_0 \cdot \bar{\bar{I}}(A, 1_{eq}) (\vec{x}_0)$$

– les modèles d'action mécanique du récepteur sur l'axe $r \rightarrow 1_{eq}$ et du moteur sur l'axe $m \rightarrow 1_{eq}$

$$\mathcal{F}(r \rightarrow 1_{eq}) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_r \vec{x}_0 \end{cases} \quad \mathcal{F}(m \rightarrow 1_{eq}) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{cases}$$

1. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au modèle équivalent.
2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'axe électrique.
3. Par identification, exprimer l'inertie équivalente J_{eq} et le couple résistant équivalent C_r .

4.7 Ligne d'imprimerie

Le mécanisme étudié, représenté sur la figure 4.11, est situé en bout d'une ligne d'imprimerie pour évacuer les journaux imprimés.

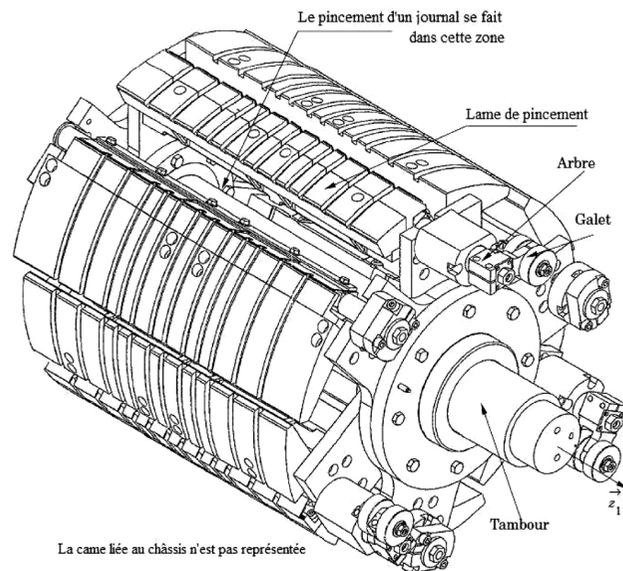


Figure 4.11 – Implantation du mécanisme étudié

L'objet de l'étude est schématisé sur la figure 4.12.

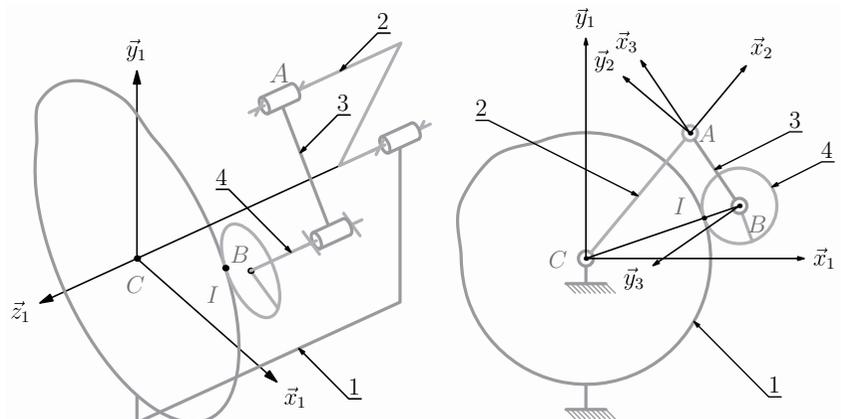


Figure 4.12 – Schéma cinématique

Ce dispositif est constitué essentiellement de :

- un châssis 1 auquel est associé un repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ supposé galiléen ;
- un tambour moteur 2 en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le châssis 1, on lui associe le repère $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$;
- trois ensembles constitué chacun de :
 - un arbre 3 en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec le tambour moteur 2, on lui associe le repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$,
 - un galet 4 auquel est associé un repère $(B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$,
 - en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_3) avec l'axe 3,
 - en contact de type ponctuel avec le châssis 1 en I .

L'évacuation des journaux s'effectue en trois temps :

- saisie du journal par basculement de la lame de pincement lorsque le galet parcourt la zone FG voir figure 4.13 ;
- entraînement du journal pendant que le galet décrit l'arc HG ;
- évacuation du journal par ouverture de la lame de pincement lorsque le galet est dans la zone HE .

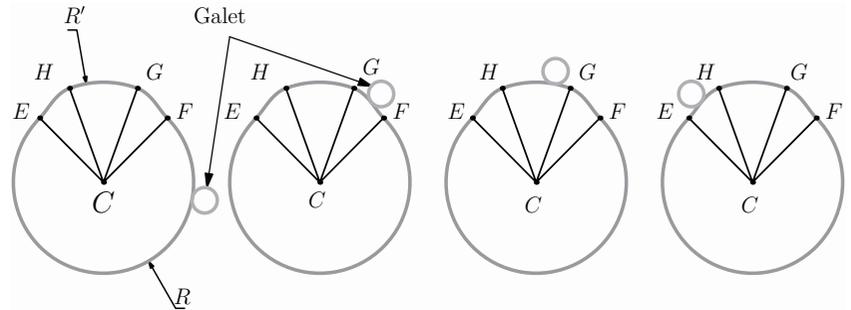


Figure 4.13 – Position du galet dans les différentes phases du cycle

Paramétrage des liaisons

$$\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \varphi = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) \quad \delta = (\vec{x}_3, \vec{x}_4)$$

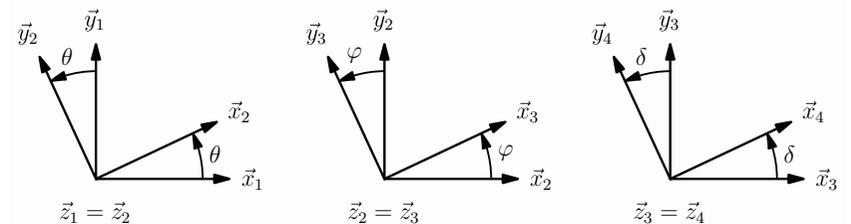


Figure 4.14 – Position relative des bases

Paramétrages des constantes

$$\vec{AB} = -h\vec{x}_3 + L\vec{z}_1$$

$$\vec{CA} = (R + r)\vec{x}_2 - L\vec{z}_1$$

$$\vec{BI} = r\vec{u}$$

Données complémentaires

$$\gamma = (\vec{x}_3, \vec{u}) = (\vec{y}_3, \vec{v})\beta = (\vec{x}_2, \vec{CI})$$

Les données mécaniques des différents composants sont les suivantes :

– l'arbre 3 est de masse m_3 , de centre de gravité G_3 . La répartition de sa masse est caractérisée par

$$\bar{\bar{I}}(A,3) = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

On pose $\vec{AG}_3 = a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$.

– le galet 4 est de rayon r , de masse m_4 et de centre gravité B . La répartition de sa masse est caractérisée par

$$\bar{\bar{I}}(B,4) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

On fait les hypothèses suivantes :

– $\vec{g} = -g\vec{y}_1$;

– les galets 4 roulent sans glisser sur le châssis 1 en I ;

– un dispositif élastique de type barre de torsion, non représenté sur la figure 4.12 est installé entre le tambour moteur 2 et l'arbre 3 afin de maintenir le contact entre le galet 4 et le châssis 1 ;

– l'action de la barre de torsion est modélisée par

$$\vec{M}(A,2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2 = -C_t \quad \text{avec} \quad C_t > 0$$

– l'action motrice est décrite par

$$\vec{M}(C,1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = C_m \quad \text{avec} \quad C_m > 0$$

– la rotation du tambour moteur 2 s'effectue à une vitesse constante de 420 tr.min^{-1} ;

– l'action du châssis 1 sur le galet 4 est notée : $\vec{R}(1 \rightarrow 4) = -N_{14}\vec{u} + T_{14}\vec{v}$.

Données numériques

$$R = 237 \text{ mm} \quad R = 242,9 \text{ mm} \quad r = 26 \text{ mm} \quad h = 48 \text{ mm}$$

$$\varphi \in [77,83; 84,76] \quad \gamma \in [84,76; 91,9] \quad \beta \in [-10,48; -10,27]$$

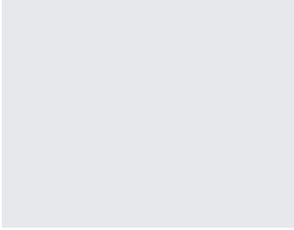
$$C_4 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2 \quad C_3 = 24,3 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2 \quad m_3 = 5,5 \text{ kg} \quad m_4 = 0,42 \text{ kg}$$

L'objectif de l'étude est de déterminer les conditions nécessaires au maintien du contact en I entre le galet 4 et le châssis 1.

1. Tracer le graphe de liaison du mécanisme avec un seul ensemble $\{3 + 4\}$.

En vue de l'étude dynamique, on souhaite savoir si δ peut être considéré comme constant sur toute la durée d'un cycle.

2. En exploitant le roulement sans glissement en I , déterminer une expression de δ en fonction de θ , β , γ et de constantes géométriques. Conclure.



3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au mouvement au solide 4, déterminer la condition à vérifier pour que $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ soit colinéaire à \vec{BI} . Conclure.
4. Écrire une équation différentielle liant N_{14} au couple C_t développé par la barre de torsion.
5. En déduire les conditions que doit vérifier C_t afin que le contact en I soit maintenu pendant les différentes phases du cycle.

Du mal à démarrer ?

- 4.1** 1. Exprimer une des définitions du centre de masse, par exemple

$$m\vec{OG} = \int \vec{OP} dm$$

2. La définition scalaire d'un moment d'inertie est la plus appropriée

$$I_{Ou} = \int r^2 dm$$

5. Existe-t-il une relation de changement de points ?
 6. Utiliser l'expression d'un moment d'inertie à partir de l'opérateur d'inertie.

$$I_{Ou} = \vec{u} \cdot \vec{I}(O, S) \vec{u}$$

- 4.2** 1. Paramétrer signifie ici :

- associer un repère à la pièce ;
- positionner les points caractéristiques ;
- matérialiser les cotes données par l'énoncé.

2. Faire un dessin et exprimer le centre de masse comme barycentre est profitable.

- 4.3** 1. Exploiter les propriétés géométriques d'un solide homogène avant de se lancer dans des calculs.

2. Identifier les éléments de symétrie est profitable, mais seulement ceux issus du point A .

3. Pour les termes de la diagonale, utiliser les résultats connus pour des tiges.

Pour les autres termes, revenir à la définition sous forme d'intégrale.

5. Une infinité de solutions est possible : imaginer des formes simples, en créant par exemples des propriétés géométriques utiles.

- 4.4** 1. Ne pas répondre sans faire l'expérience, avec un mouvement simple.

2. Faire un schéma.

4. Détailler les conditions sur chacune des trois composantes non nulles des éléments de réduction du torseur d'action mécanique $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$, exprimés au point mis en évidence à la question précédente.

5. Faire des schémas pour visualiser les glisseurs dans les différentes configurations.

- 4.5** 1. Tracer le graphe des liaisons, et exprimer les différents torseurs cinématiques, en tenant compte :

- de l'hypothèse de l'énoncé pour le mouvement 2/1 ;
- de la liaison pivot pour le mouvement 3/2 ;
- du roulement sans glissement au point E pour le mouvement 3/1.

2. Exprimer l'énergie cinétique à partir du comoment des torseurs cinétique et cinématique.

3. Bien identifier les mouvements concernés pour évaluer proprement les éléments de réduction des deux torseurs.

4. Les énergies cinétiques sont des quantités additives.

5. Partir de l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un système de solides indéformables, puis développer chacun des trois termes de manière systématique.

6. De quelle action mécanique est issu le couple moteur ? Où est localisé le phénomène de glissement à éviter ?

- 4.6** 2. Il n'y a ni piège, ni baguette magique ; seules rigueur et méthode sont à mettre en œuvre.

3. C'est juste un acte d'identification.

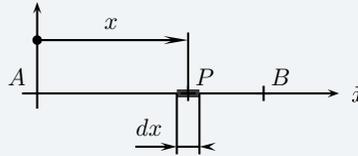
Corrigés des exercices

4.1 Tige

1. Le centre de masse G peut être déterminé à partir du point A

$$m\vec{AG} = \int_T \vec{AP} dm$$

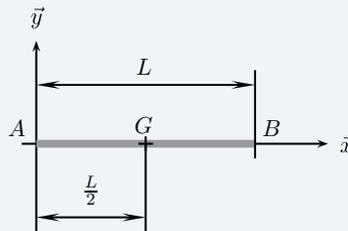
La tige est supposée homogène : on pose sa masse linéique $\rho = \frac{m}{L}$ et le point courant P , de masse élémentaire $dm = \rho dx$, est localisé par $\vec{AP} = x\vec{x}$.



On calcule alors

$$m\vec{AG} = \rho \int_0^L x dx \vec{x} = \rho \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L \vec{x} = \rho \frac{L^2}{2} \vec{x} = m \frac{L}{2} \vec{x}$$

Le centre de masse est au milieu du segment $[AB]$



2. On considère la définition scalaire du moment d'inertie I_{Ay} recherché

$$I_{Ay} = \int_T r^2 dm$$

Le point courant P , de masse élémentaire $dm = \rho dx$, est à la distance x de l'axe (A, \vec{y}) . On obtient alors

$$I_{Ay} = \rho \int_0^L x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \rho \frac{L^3}{3} = m \frac{L^2}{3}$$

3. Une première méthode consiste à reprendre le calcul précédent en changeant simplement les bornes d'intégration

$$I_{Gy} = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \rho \frac{L^3}{12} = m \frac{L^2}{12}$$

Une deuxième méthode consiste à utiliser la relation de changement de point de Huygens

$$I_{Ay} = I_{Gy} + \underbrace{md^2}_{m \frac{L^2}{4}}$$

On retrouve bien le même résultat

$$I_{Gy} = m \frac{L^2}{3} - m \frac{L^2}{4} = m \frac{L^2}{12}$$

On constate au passage que le terme complémentaire md^2 est bien plus important que le moment d'inertie I_{Gy} . L'évaluation rapide de l'ordre de grandeur d'un moment d'inertie se fait à partir de masses concentrées !

4. L'axe (A, \vec{x}) est un axe de révolution pour la tige. On en déduit immédiatement la forme de la matrice de l'opérateur d'inertie dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\bar{\bar{I}}(A, T) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Toute la masse est concentrée sur la droite (A, \vec{x}) : le moment d'inertie $A = I_{Ax}$ est donc nul. Le moment d'inertie $B = I_{Ay}$ a été calculé précédemment. On a donc finalement

$$\bar{\bar{I}}(A, T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

5. Pour déterminer l'expression matricielle de l'opérateur d'inertie $\bar{\bar{I}}(C, T)$, on utilise la relation de changement de point

$$\bar{\bar{I}}(C, T) = \bar{\bar{I}}(G, T) + \bar{\bar{I}}(C, G[m])$$

Le premier terme se déduit immédiatement des questions précédentes

$$\bar{\bar{I}}(G, T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le second terme se détermine aisément une fois déterminé le vecteur \overrightarrow{CG} :

• l'énoncé donne le vecteur \overrightarrow{AC} et on a déterminé à la première question le vecteur \overrightarrow{AG}

$$\overrightarrow{AC} \underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{=} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{AG} \underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{=} \begin{vmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{CG} \underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{=} \begin{vmatrix} \frac{L}{2} - a \\ -b \\ -c \end{vmatrix}$$

• on pose $a' = a - \frac{L}{2}$ et on exprime directement $\bar{\bar{I}}(C, G[m])$

$$\bar{\bar{I}}(C, G[m]) = \begin{bmatrix} m(b^2 + c^2) & -a'b & -a'c \\ -a'b & m(c^2 + a'^2) & -bc \\ -a'c & -bc & m(a'^2 + b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La matrice recherchée est la matrice obtenue en sommant terme à terme les deux matrices précédentes

6. Le moment d'inertie recherché se trouve directement à partir de la matrice de l'opérateur d'inertie au point A

$$I_{A\delta} = \bar{\delta} \cdot \bar{\bar{I}}(A, T) \cdot (\bar{\delta})$$

On exprime le vecteur $\bar{\delta}$ dans la même base que la matrice en posant $\bar{\delta} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$ et on en déduit

$$I_{A\delta} = m \frac{L^2}{3} \sin^2 \alpha$$

4.2 Calotte sphérique

Paramétrer la figure consiste à :

- associer un repère $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à la pièce ;
- coter les deux rayons R et r , ainsi que la hauteur h ;
- positionner les centres de masse des volumes élémentaires, à savoir G_s le centre de masse de la demi-sphère pleine de masse m_s et G_c le centre de masse du cylindre de révolution creux de masse $-m_c$.

2. Si l'on veut que le centre de masse de la sphère évidée soit confondu avec le centre de masse du trou cylindrique de révolution, cela veut dire que l'on souhaite que les trois centres de masse soient confondus !

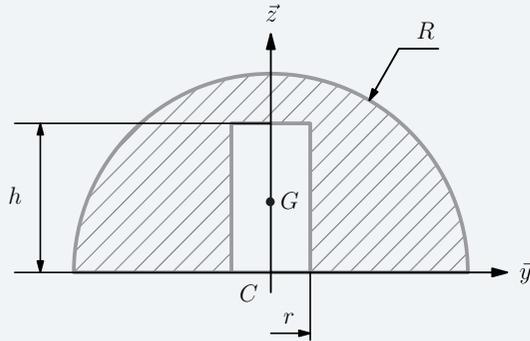
Pour valider cette proposition, on exprime à partir du point C la position du point G , barycentre des points G_s et G_c affectés des masses respectives m_s et $-m_c$

$$(m_s - m_c)\vec{CG} = m_s\vec{CG}_s - m_c\vec{CG}_c$$

On choisit le point G_c à la place du point C pour réécrire cette relation

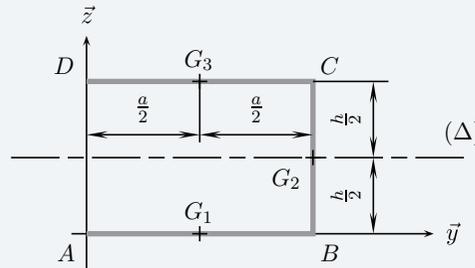
$$(m_s - m_c)\underbrace{\vec{G}_c\vec{G}}_{=\vec{0}} = m_s\vec{G}_c\vec{G}_s - m_c\underbrace{\vec{G}_c\vec{G}_c}_{=\vec{0}}$$

Le vecteur $\vec{G}_c\vec{G}_c$ est le vecteur nul, on souhaite le vecteur $\vec{G}_c\vec{G}$ également nul. La masse m_s est non nulle : on en déduit que les points G_c et G_s doivent être confondus.



4.3 Malaxeur

1. Le solide étudié présente un axe de symétrie (Δ) . Le centre de masse G est sur cette droite



Le centre de masse se détermine comme barycentre des trois centres de masse G_i affectés des masses respectives m_i , ce qui s'exprime pour l'ordonnée manquante

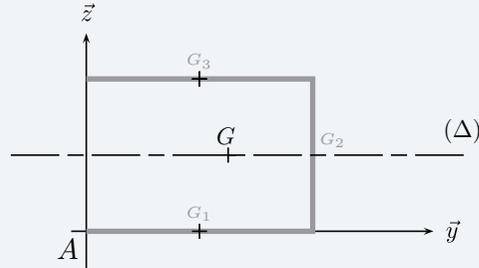
$$y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 m_i y_i$$

Le solide est supposé homogène : on pose sa masse linéique $\rho = \frac{m}{2a+h}$ et on pose ainsi les masses partielles des segments

$$m_1 = m_3 = m \frac{a}{2a+h} \quad m_2 = m \frac{h}{2a+h}$$

On en déduit l'expression de l'ordonnée du centre de masse G

$$y_G = \frac{a(a+h)}{2a+h}$$



2. On s'intéresse à la répartition de la masse autour du point A , pour lequel il n'y a qu'un seul plan de symétrie, le plan (A, \vec{y}, \vec{z}) . La forme de la matrice de l'opérateur $\bar{\bar{I}}(A, S)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est alors

$$\bar{\bar{I}}(A, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Comme de plus il n'y a pas de matière en dehors du plan de symétrie, on en déduit que le moment d'inertie par rapport à l'axe (A, \vec{x}) est la somme des deux autres

$$A = B + C$$

On retient alors comme forme finale pour l'opérateur $\bar{\bar{I}}(A, S)$

$$\bar{\bar{I}}(A, S) = \begin{bmatrix} B+C & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

3. Les moments d'inertie B et C se déterminent de manière élémentaire, à partir des expressions connues pour une tige et une masse concentrée :

- on commence par $C = I_{Az}$ en considérant chaque segment successivement

$$C = m_1 \frac{a^2}{3} + m_2 a^2 + m_3 \frac{a^2}{3}$$

Après substitution des masses partielles, on factorise ma^2 pour obtenir

$$C = ma^2 \frac{2a+3h}{3(2a+h)}$$

- pour le terme $B = I_{Ay}$, seuls deux segments apportent des quantités non nulles

$$B = m_2 \frac{h^2}{3} + m_3 h^2$$

On factorise cette fois mh^2 pour obtenir

$$B = mh^2 \frac{3a+h}{3(2a+h)}$$

Le produit d'inertie D se calcule à partir de sa définition, $D = \int yz dm$, en suivant successivement les trois segments

$$D = \underbrace{\int_0^a \rho_0 y dy}_{(1)} + \underbrace{\int_0^h \rho a z dz}_{(2)} + \underbrace{\int_0^a \rho h y dy}_{(3)}$$

On en déduit

$$D = (m_2 + m_3) \frac{ah}{2}$$

Après substitution des masses partielles, on obtient en définitive

$$D = mah \frac{a+h}{2(2a+h)}$$

4. Le raisonnement de la deuxième question peut être reproduit à l'identique et la forme de la matrice est toujours la même. Seules les valeurs des composantes changent

$$\bar{\bar{I}}(A, S) = \begin{bmatrix} B' + C' & 0 & 0 \\ 0 & B' & -D' \\ 0 & -D' & C' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Pour les moments d'inertie B' et C' , les contributions des masses ajoutées sont équivalentes aux contributions des masses initiales. On en déduit

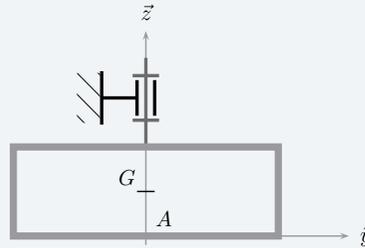
$$B' = 2B$$

$$C' = 2C$$

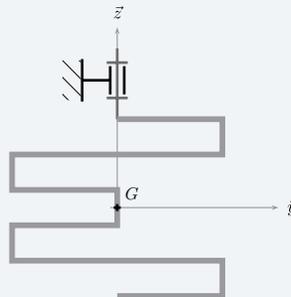
5. Dans le cas étudié, l'axe (A, \vec{z}) est axe principal d'inertie si et seulement si le produit d'inertie D' est nul. La symétrie axiale d'axe (A, \vec{x}) fait que pour tout point P du solide S de coordonnées (y, z) dans le plan (A, \vec{y}, \vec{z}) , il existe son symétrique de coordonnées $(-y, -z)$. Le produit d'inertie D' est alors également le double du produit d'inertie D et ne peut être nul.

Une infinité de solutions existe. On peut en proposer ici trois :

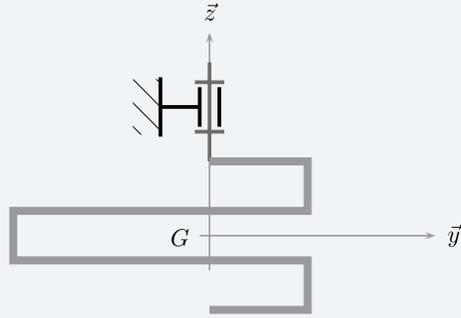
- obtenir au moins un deuxième plan de symétrie



- inventer tout motif présentant deux plans de symétrie, avec les centres de masse des motifs élémentaires sur l'axe de rotation



- un dernier exemple à deux plans de symétrie, donc D' est nul, mais pour lequel il faut veiller à conserver le centre de masse G sur l'axe de rotation

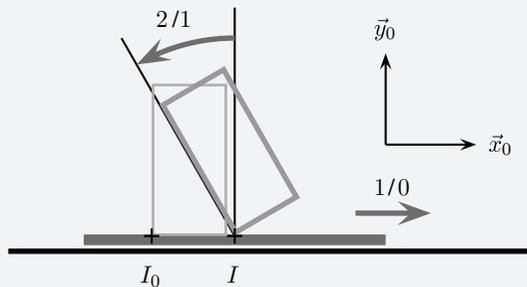


4.4 Convoyeur

1. Concernant l'expérience faite, le mouvement du convoyeur 1 par rapport au bâti 0 est assimilable à un mouvement de translation rectiligne.

$$\mathcal{V}(1/0) = \begin{cases} \vec{0} \\ v_{10}\vec{x}_0 \end{cases}$$

2. Lors d'une accélération trop forte à la mise en mouvement du convoyeur, on observe que la boîte bascule autour du point I repéré ci-dessous, donc autour de la droite (I, \vec{z}_0) .



3. On ne souhaite aucun mouvement de la boîte 2 par rapport au convoyeur 1

$$\mathcal{V}(2/1) = \mathcal{O}$$

4. La boîte étudiée est en contact plan avec le tapis du convoyeur. Dans le cas d'une modélisation plane, et en prenant en compte le phénomène de frottement, on pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} N\vec{y}_0 + T\vec{x}_0 \\ M\vec{z}_0 \end{cases}$$

avec comme conditions

$$N \geq 0 \quad \left| \frac{T}{N} \right| \leq f \quad M \geq 0$$

5. Le principe fondamental de la dynamique s'exprime par l'équivalence du torseur des quantités d'accélération avec le torseur des actions mécaniques extérieures au système envisagé

$$\mathcal{D}(2/Rg) = \mathcal{F}(\vec{2} \rightarrow 2)$$

- Comme on ne souhaite pas de mouvement de la boîte par rapport au convoyeur, la composition des mouvements sur la chaîne ouverte $0 - 1 - 2$ permet d'écrire

$$\mathcal{V}(2/0) = \begin{cases} \vec{0} \\ v_{10}\vec{x}_0 \end{cases}$$

Le torseur dynamique $\mathcal{D}(2/0)$ est donc un glisseur dont l'axe central passe par le centre de masse G de la boîte 2

$$\mathcal{D}(2/0) =_G \begin{cases} m\dot{v}_{10}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

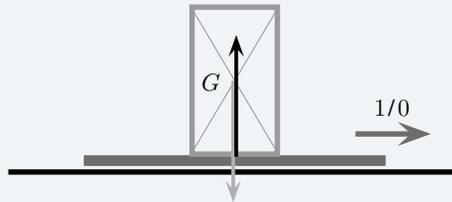
- La boîte est soumise aux actions du convoyeur et de la pesanteur, dont on précise le torseur

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) =_G \begin{cases} -mg\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

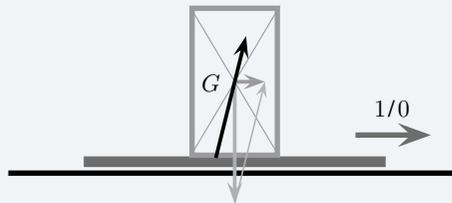
On constate que le torseur dynamique $\mathcal{D}(2/Rg)$ est un glisseur dont l'axe central passe par le centre de masse G , et qu'il est équivalent à la somme du glisseur $\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$ dont l'axe central passe également par G et du torseur $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$. On en déduit que le torseur de l'action mécanique du convoyeur sur la boîte $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ est également un glisseur dont l'axe central passe par le centre de masse G .

On peut dessiner ces glisseurs dans deux cas particuliers :

- à vitesse de convoyeur constante



- en phase d'accélération



6. L'équation de résultante issu du PFD permet de dire

$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = m\dot{v}_{10}\vec{x}_0 + mg\vec{y}_0$$

En supposant les lois de frottement applicables à la résultante $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$, on en déduit comme condition pour l'accélération du convoyeur

$$\left| \frac{\dot{v}_{10}}{g} \right| \leq f$$

7. La condition de non-basculement a été exprimée à la question 4 et s'interprète graphiquement en disant que l'axe central du glisseur exercé par le convoyeur sur la boîte doit passer à la droite du point de basculement éventuel I

$$\left| \frac{\dot{v}_{10}}{g} \right| \leq \frac{a}{h}$$

8. Pour savoir si l'objet va glisser ou basculer, il suffit de comparer le coefficient de frottement f à son rapport largeur a sur hauteur h :

– il y aura toujours basculement si $\frac{a}{h} < f$;

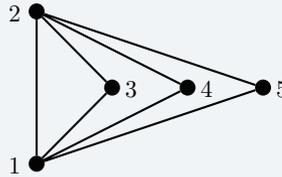
– il n'y aura que glissement si $f < \frac{a}{h}$;

Pour éviter ces deux soucis, l'accélération du convoyeur par rapport au bâti doit rester inférieure au produit du plus petit des deux par l'accélération de la pesanteur

$$|\dot{v}_{10}| \leq g \min\left(f, \frac{a}{h}\right)$$

4.5 Positionneur

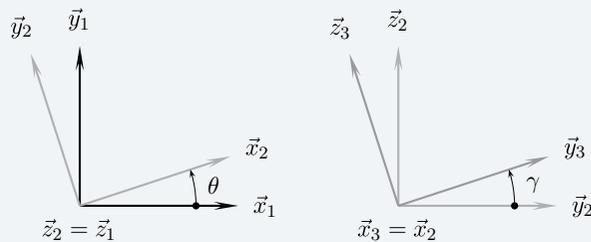
1. La structure décrite par l'énoncé comporte trois boucles



Sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1, on exprime les différents torseurs cinématiques, en tenant compte :

- de l'hypothèse de l'énoncé pour le mouvement 2/1 ;
- de la liaison pivot pour le mouvement 3/2 ;
- du roulement sans glissement au point E pour le mouvement 3/1.

$$\mathcal{V}(2/1) =_G \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) =_A \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) =_E \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



L'équation des vitesses issue de la composition des mouvements sur cette chaîne fermée évite les inconnues scalaires du vecteur rotation $\vec{\Omega}(3/1)$

$$\underbrace{\vec{V}(E,3/1)}_{=\vec{0}} = \vec{V}(E,3/2) + \vec{V}(E,2/1) \quad (1)$$

- sur le mouvement 2/1

$$\vec{V}(E,2/1) = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{GE} = L \dot{\theta} \vec{y}_2$$

- sur le mouvement 3/2

$$\vec{V}(E,3/2) = \dot{\gamma} \vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{AE} = R \dot{\gamma} \vec{y}_2$$

Ces deux expressions injectées dans l'équation (1) permet de trouver

$$\dot{\gamma} = -\frac{L}{R} \dot{\theta} \quad (2)$$

On retient alors comme formes pour les deux torseurs recherchés

$$\mathcal{V}(2/1) =_G \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) =_A \begin{Bmatrix} -\frac{L}{R} \dot{\theta} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

2. Pour un solide indéformable, l'énergie cinétique s'exprime comme la moitié du comoment de deux torseurs

$$E(2/1) = \frac{1}{2} \mathcal{C}(2/1) \otimes \mathcal{V}(2/1)$$

La résultante cinétique est nulle et le moment d'inertie s'exprime à partir de l'opérateur d'inertie

$$\vec{\sigma}(G, 2/1) = \bar{\bar{I}}(G, 2) \left(\vec{\Omega}(2/1) \right) = I_2 \dot{\theta} \vec{z}_2$$

On retient alors comme expression du torseur cinétique $\mathcal{C}(2/1)$

$$\mathcal{C}(2/1) =_G \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ I_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(2/1) =_G \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Le calcul du comoment est dans ce cas immédiat

$$E(2/1) = \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

3. On reprend les différentes étapes de la question précédente

$$E(3/1) = \frac{1}{2} \mathcal{C}(3/1) \otimes \mathcal{V}(3/1)$$

Le torseur cinématique $\mathcal{V}(3/1)$ se trouve par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 3 – 2 – 1

$$\mathcal{V}(3/1) = \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1)$$

On trouve ainsi

$$\mathcal{V}(3/1) =_A \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{x}_2 + \dot{\theta} \vec{z}_2 \\ L \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{Bmatrix}$$

Le point A est le centre d'inertie de la roue 3 : la résultante cinétique s'exprime alors par la quantité de mouvement $m_3 \vec{V}(A, 3/1)$.

Pour le moment cinétique au point A , on constate que l'expression de l'opérateur d'inertie donnée $\bar{\bar{I}}(A, 3)$ est valable également dans la base 2. Il n'est donc pas nécessaire d'exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(3/1)$ dans la base 3 et on obtient

$$\vec{\sigma}(A, 3/1) = J_3 \dot{\gamma} \vec{x}_2 + I_3 \dot{\theta} \vec{z}_2$$

On retient alors comme expression du torseur cinétique $\mathcal{C}(3/1)$

$$\mathcal{C}(3/1) =_A \begin{Bmatrix} m_3 L \dot{\theta} \vec{y}_2 \\ J_3 \dot{\gamma} \vec{x}_2 + I_3 \dot{\theta} \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) =_A \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{x}_2 + \dot{\theta} \vec{z}_2 \\ L \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{Bmatrix}$$

Il reste à calculer le comoment de ces deux derniers torseurs en exploitant la relation (2)

$$E(3/1) = \frac{1}{2} \left(I_3 + m_3 L^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 J_3 \right) \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

4. Les énergies cinétiques se somment

$$\begin{aligned} E(\Sigma/1) &= \sum_{i=2}^5 E(i/1) \\ &= E(2/1) + 3E(3/1) \end{aligned}$$

On déduit l'expression recherchée des équations (3) et (4)

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2, \text{ avec } J_{eq} = I_2 + 3I_3 + 3m_3 L^2 + 3 \left(\frac{L}{R} \right)^2 J_3 \quad (5)$$

L'expression J_{eq} représente le moment d'inertie équivalent rapporté à l'axe de rotation du positionneur.

5. On commence par l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un système de solides indéformables

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/1) = \sum_{i=2}^5 P_g(\bar{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{j>k} P(j \leftrightarrow k) \quad (6)$$

Chacun des trois termes est à développer :

- concernant l'énergie cinétique, on reprend l'expression (5) pour la dériver par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/1) = J_{eq} \ddot{\theta} \quad (7)$$

- la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures est nulle. En effet :

- ▷ le plan d'évolution est horizontal ;
- ▷ le contact entre roue et sol est sans glissement :

$$\sum_{i=2}^5 P_g(p \rightarrow i) + \sum_{i=3}^5 P_g(1 \rightarrow i) = 0$$

- la puissance des actions mécaniques intérieures s'évalue en deux fois :

- ▷ les trois liaisons pivot sont supposées parfaites, les puissances correspondantes sont en conséquence nulles ;
- ▷ on détaille la puissance développée par le moteur sur la roue 3 par exemple :

$$P(2 \leftrightarrow 3) = \mathcal{F}(2 \rightarrow 3) \otimes \mathcal{V}(3/2) = C_m \dot{\gamma}$$

On trouve finalement

$$C_m = \frac{1}{3} J_{eq} \ddot{\theta} \quad (8)$$

6. Le couple moteur est exercé par le stator sur une roue, et le phénomène de glissement à éviter est au contact sol-roue. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au mouvement de la roue par rapport au sol permet alors de répondre, en écrivant l'équation de moment au point A suivant \vec{x}_3 pour éviter les inconnues de la liaison pivot entre la roue et le châssis.

4.6 Axe électrique

1. Soit le graphe de structure pour le modèle équivalent



Écriture des torseurs de description des mouvements et des actions mécaniques de liaison

$$\mathcal{V}(1/0) =_A \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(0 \rightarrow 1) =_A \begin{Bmatrix} \vec{R}(0 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A, 0 \rightarrow 1) \perp \vec{y}_1 \end{Bmatrix}$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique à la pièce 1_{eq} en mouvement par rapport à $0 \equiv Rg$.

$$\frac{d}{dt} E(1_{eq}/Rg) = P_g(\overline{1_{eq}} \rightarrow 1_{eq}) \quad (1)$$

On détaille les deux termes :

- concernant l'énergie cinétique d'une pièce en mouvement par rapport à un axe immobile dans le galiléen

$$E(1_{eq}/Rg) = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2$$

le terme de gauche de l'équation (1) est alors

$$\frac{d}{dt} E(1_{eq}/Rg) = J_{eq} \ddot{\theta} \dot{\theta} \quad (2)$$

- concernant la puissance galiléenne de l'action mécanique $\overline{1_{eq}} \rightarrow 1_{eq}$

$$Pg(\overline{1_{eq}} \rightarrow 1_{eq}) = \mathcal{F}(\overline{1_{eq}} \rightarrow 1_{eq}) \otimes \mathcal{V}(1_{eq}/Rg)$$

Le milieu environnant $\overline{1_{eq}}$ comprend :

- le bâti 0 ;
- le moteur m ;
- le récepteur équivalent r_{eq} .

On obtient ainsi comme expression

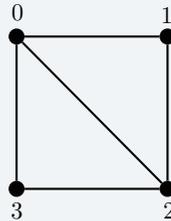
$$Pg(\overline{1_{eq}} \rightarrow 1_{eq}) = (C_m + C_r) \dot{\theta} \quad (3)$$

en rassemblant les résultats (2) et (3), on obtient finalement, en supposant $\dot{\theta} \neq 0$

$$J_{eq} \ddot{\theta} = C_m + C_r \quad (4)$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation de moment au point A scalaire \vec{x}_0 issue du principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement $1_{eq}/0$ lorsque la liaison entre 0 et 1 est parfaite.

2. Soit le graphe de structure pour l'axe électrique



On pose l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3\}$.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à Σ en mouvement par rapport à $0 \equiv Rg$.

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/Rg) = \sum_i Pg(\overline{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{j>k} P(j \leftrightarrow k)$$

Approche cinématique

Pour calculer les puissances et les énergies cinétiques, on a besoin de la description des mouvements par rapport au référentiel galiléen :

- sur la chaîne fermée $0 - 1 - 2 - 0$:

$$\mathcal{V}(1/0) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{x}_0 \\ \dot{\theta} \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(2/0) = \begin{Bmatrix} \omega_{20} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

ce mécanisme est un engrenage pour lequel les axes de rotations sont immobiles par rapport au bâti. On en déduit

$$\frac{\omega_{20}}{\dot{\theta}} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{r_1}{r_2}$$

on obtient alors l'expression de ω_{20} en fonction de $\dot{\theta}$

$$\omega_{20} = -\frac{r_1}{r_2} \dot{\theta} \quad (5)$$

• sur la chaîne fermée 0 – 2 – 3 – 0 :

$$\mathcal{V}(2/3) =_B \begin{cases} \omega_{23} \vec{x}_0 \\ V_{23} \vec{x}_0, \text{ avec } V_{23} = p\omega_{23} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/0) = \begin{cases} \vec{0} \\ V_{30} \vec{x}_0 \end{cases}$$

la composition des vecteurs rotation scalaire \vec{x}_0 donne

$$\omega_{23} = \omega_{20}$$

la composition des vitesses au point B scalaire \vec{x}_0 donne

$$V_{30} = -V_{23}$$

on obtient finalement, en exploitant de plus l'équation (5)

$$V_{30} = -p\omega_{20} = p\frac{r_1}{r_2} \dot{\theta} \quad (6)$$

Énergie cinétique galiléenne

L'énergie cinétique galiléenne totale est la somme des énergies cinétiques galiléennes de chacun des solides

$$E(\Sigma/Rg) = \sum_{i=1}^3 E(i/Rg)$$

Pour un solide indéformable, l'énergie cinétique s'obtient comme la moitié du comoment des torseurs cinématique et cinétique

$$E(i/Rg) = \mathcal{V}(i/Rg) \otimes \mathcal{C}(i/Rg)$$

Les rotations 1/0 et 2/0 se font autour d'axes immobiles dans le galiléen :

• rotor du moteur et axe 1

$$E(1/Rg) = \frac{1}{2} (J_m + I_1) \dot{\theta}^2 \quad (7)$$

• arbre 2

$$E(2/Rg) = \frac{1}{2} I_2 \omega_{20}^2 \quad (8)$$

Le chariot 3 est en translation par rapport au galiléen 0 :

• chariot 3

$$E(3/Rg) = \frac{1}{2} m_3 V_{30}^2 \quad (9)$$

On obtient l'expression de $E(\Sigma/Rg)$ en sommant terme à terme les trois équations (7), (8) et (9), tout en tenant compte des résultats (5) et (6) pour pouvoir factoriser $\dot{\theta}^2$

$$E(\Sigma/Rg) = \frac{1}{2} \left(J_m + I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + m_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right) \dot{\theta}^2$$

Il ne reste plus qu'à dériver cette dernière équation par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/Rg) = \left(J_m + I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + m_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right) \ddot{\theta} \dot{\theta} \quad (10)$$

Puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures

Trois solides composent l'ensemble Σ :

$$\sum_i P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow i) = P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 1) + P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 2) + P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 3)$$

On rappelle que pour un solide i , la puissance galiléenne s'évalue comme le comoment du torseur d'action mécanique et du torseur cinématique

$$P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 1) = \mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(i/Rg)$$

On considère successivement les trois mouvements et on détaille les actions mécaniques retenues

• concernant 1/0, l'action mécanique $\overline{\Sigma} \rightarrow 1$ comprend :

– la pesanteur $p \rightarrow 1$

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 1) =_{G_1} \begin{cases} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}, \text{ avec } \vec{A}G_1 = x_{G_1} \vec{x}_0$$

– le moteur $m \rightarrow 1$

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{cases}$$

– le bâti $0 \rightarrow 1$

$$\mathcal{F}(0 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(0 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A, 0 \rightarrow 1), \text{ avec } \vec{M}(A, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -\mu_1 \dot{\theta} \end{cases}$$

on obtient ainsi

$$P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 1) = (C_m - \mu_1 \dot{\theta}) \dot{\theta} \quad (11)$$

• concernant 2/0, l'action mécanique $\overline{\Sigma} \rightarrow 2$ comprend :

– la pesanteur $p \rightarrow 2$

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) =_{G_2} \begin{cases} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}, \text{ avec } \vec{B}G_2 = x_{G_2} \vec{x}_0$$

– le bâti $0 \rightarrow 2$

$$\mathcal{F}(0 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(0 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(B, 0 \rightarrow 2), \text{ avec } \vec{M}(B, 0 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_0 = -\mu_2 \omega_{20} \end{cases}$$

on obtient ainsi

$$P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 2) = -\mu_2 \omega_{20}^2$$

en reprenant l'expression cinématique de l'équation (5), on propose finalement

$$P_g(\overline{\Sigma} \rightarrow 2) = -\mu_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta}^2 \quad (12)$$

• concernant 3/0, l'action mécanique $\overline{\Sigma} \rightarrow 3$ comprend :

– la pesanteur $p \rightarrow 3$

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) =_{G_3} \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

– le récepteur $r \rightarrow 3$

$$\mathcal{F}(r \rightarrow 3) = {}_B \begin{Bmatrix} F\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

– le bâti $0 \rightarrow 3$

$$\mathcal{F}(0 \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(0 \rightarrow 3), \text{ avec } \vec{R}(0 \rightarrow 3) \cdot \vec{x}_0 = -\mu_3 V_{30} \\ \vec{M}(B, 0 \rightarrow 3) \end{Bmatrix}$$

on obtient ainsi

$$Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow 3) = (F - \mu_3 V_{30}) V_{30}$$

en reprenant l'expression cinématique de l'équation (6), on propose finalement

$$Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow 3) = \left(F \left(p \frac{r_1}{r_2} \right) - \mu_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta} \right) \dot{\theta} \quad (13)$$

Puissance des interefforts

Le graphe de structure permet de dire qu'il n'y a que deux termes à évaluer sur les trois possibles

$$\sum_{j>k} P(j \leftrightarrow k) = P(2 \leftrightarrow 3) + P(1 \leftrightarrow 2)$$

Les deux liaisons sont supposées parfaites, et ces deux termes sont alors nuls pour cette étude.

$$\sum_{j>k} P(j \leftrightarrow k) = 0 \quad (14)$$

Synthèse et expression finale

On rassemble les différents morceaux issus des équations (10) à (14) pour écrire, en supposant $\dot{\theta} \neq 0$

$$\left(J_m + I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + m_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right) \ddot{\theta} = Cm + Fp \frac{r_1}{r_2} - \mu_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta} - \mu_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta} - \mu_1 \dot{\theta} \quad (15)$$

3. Par identification des équations (4) et (15), on obtient :

- concernant le moment d'inertie équivalent

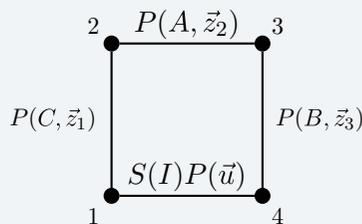
$$J_{eq} = J_m + I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + m_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

- concernant le couple résistant équivalent

$$C_r = Fp \frac{r_1}{r_2} - \mu_3 \left(p \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta} - \mu_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta} - \mu_1 \dot{\theta}$$

4.7 Ligne d'imprimerie

1. Lorsqu'on ne prend en compte qu'un seul ensemble $\{3 + 4\}$, le mécanisme comporte une chaîne fermée à 4 solides



$P(dte)$	pivot d'axe (<i>dte</i>)
$S(pt)P(vec)$	sphère de centre (<i>pt</i>)
	plan de normale (<i>vec</i>)

2. En utilisant le bouclage cinématique, on écrit au point I

$$\vec{V}(I,4/3) + \vec{V}(I,3/2) + \vec{V}(I,2/1) - \vec{V}(I,4/1) = \vec{0}$$

À partir de la définition des liaisons et du paramétrage fourni, on a

$$\mathcal{V}(4/3) =_B \begin{cases} \delta \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/2) =_A \begin{cases} \dot{\varphi} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(2/1) =_C \begin{cases} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

On exprime le roulement sans glissement en I dans le mouvement 4/1

$$\vec{V}(I,4/1) = \vec{0}$$

À partir de l'équation de bouclage cinématique et en utilisant la relation du champ des vecteurs vitesse, on a alors

$$\delta \vec{z}_3 \wedge \vec{BI} + \dot{\varphi} \vec{z}_2 \wedge \vec{AI} + \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{CI} = \vec{0}$$

Comme on veut une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\delta}$, on multiplie scalairement l'équation précédente par \vec{AI} , ce qui fournit l'égalité de deux produits mixtes

$$\dot{\delta} (\vec{z}_3, \vec{BI}, \vec{AI}) + \dot{\theta} (\vec{z}_1, \vec{CI}, \vec{AI}) = 0$$

Cette expression est à développer

$$-rh \dot{\delta} (\vec{z}_3, \vec{u}, \vec{x}_3) = R(R+r) (\vec{z}_1, \cos \beta \vec{x}_2 - \sin \beta \vec{y}_2, \vec{x}_2)$$

Finalement, on obtient

$$\dot{\delta} = -\frac{R(R+r) \sin \beta}{rh \sin \gamma} \dot{\theta} \quad \text{ou encore} \quad \dot{\delta} = A(t) \dot{\theta}$$

Lorsque le point I , point de contact entre le galet et la came, se situe sur les arcs EF ou GH , les angles β et γ sont constants. Donc, si $\dot{\theta}$ est constant, alors $\dot{\delta}$ est constant.

Lorsque le point I se situe dans les zones de changement de profil, les angles β et γ varient mais le calcul montre une variation de moins de 4 % de A pendant cette phase.

On peut considérer en première approximation que si la vitesse de rotation du tambour par rapport au châssis est constante, alors le galet tourne à vitesse constante par rapport à l'arbre 3.

3. Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à 4

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \perp \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{R}(3 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(B, 3 \rightarrow 4) \perp \vec{z}_3 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(pes \rightarrow 4) =_B \begin{cases} -m_4 g \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

On utilise l'équation de moment en B en projection sur \vec{z}_3

$$(\vec{M}(B, 3 \rightarrow 4) + \vec{R}(1 \rightarrow 4) \wedge \vec{IB}) \cdot \vec{z}_3 = \vec{\delta}(B, 4/1) \cdot \vec{z}_3$$

Comme B est le centre d'inertie de 4 alors

$$\vec{\delta}(B, 4/1) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(B, 4/1)}{dt} \right]_1 = \left[\frac{d}{dt} (\vec{I}(B, 4) \vec{\Omega}(4/1)) \right]_1$$

Comme $\vec{\Omega}(4/1) = (\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\delta}) \vec{z}_1$, en revenant à l'écriture du Principe Fondamental on obtient

$$\left(\vec{R}(1 \rightarrow 4), \vec{IB}, \vec{z}_3\right) = \frac{d}{dt} (C_4 (\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\delta}))$$

Alors si

$$C_4 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \ddot{\delta}) = 0$$

on a $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ colinéaire à \vec{IB} , car $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ est orthogonal à \vec{z}_3 .

Tant que le point de contact se situe sur les profils circulaires de la came, arc EF et GH , $\dot{\delta}$ est constant et $\dot{\varphi}$ est nul donc la condition de colinéarité est respectée.

Par contre, dans les zones de changement de profil, si on admet que $\dot{\delta}$ est constant en première approximation comme montré précédemment, il faudrait donc que

$$C_4 \ddot{\varphi} = 0$$

pour obtenir la colinéarité entre \vec{IB} et $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$.

Compte tenu des données, le temps mis pour balayer l'angle (\vec{CF}, \vec{CG}) est d'environ 0,01 seconde. Pendant ce temps, l'angle φ varie d'environ 7° . On supposant une loi de vitesse triangulaire, on peut évaluer l'accélération angulaire $\ddot{\varphi}$ à environ 4885 rad.s^{-1} .

On obtient alors

$$rT_{14} = C_4 \ddot{\varphi} \approx 0,7 \text{ Nm}$$

La composante tangentielle de $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ peut être évaluée alors à environ 26 N.

4. Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à $\{3 + 4\}$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(A, 2 \rightarrow 3), \text{ avec } \vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_3 = -C_t \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \perp \vec{z}_1 = 0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(pes \rightarrow 4) = \begin{cases} -m_4 g \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(pes \rightarrow 3) = \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation de moment appliqué à l'ensemble $\Sigma = \{3 + 4\}$ en A en projection sur \vec{z}_2 s'écrit

$$\vec{M}(A, \Sigma \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{z}_2 = \left(\vec{\delta}(A, 4/1) + \vec{\delta}(A, 3/1) \right) \cdot \vec{z}_2$$

• Calcul de $\vec{\delta}(A, 4/1) \cdot \vec{z}_2$

En utilisant la relation du champ de vecteurs moment dynamique, on écrit

$$\vec{\delta}(A, 4/1) = \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{I}(B, 4) \vec{\Omega}(4/1) \right) \right]_1 + m_4 \vec{a}(B, 4/1) \wedge \vec{BA}$$

Comme $\dot{\theta}$ et $\dot{\delta}$ sont constants, on a alors

$$\vec{\delta}(A, 4/1) \cdot \vec{z}_2 = C_4 \ddot{\varphi} - m_4 h \vec{a}(B, 4/1) \cdot \vec{y}_3$$

$$\text{avec } \vec{a}(B, 4/1) = -(R+r)\dot{\theta}^2 \vec{x}_2 - h\ddot{\varphi} \vec{y}_3 + h(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \vec{x}_3$$

Donc finalement

$$\vec{\delta}(A, 4/1) \cdot \vec{z}_2 = (C_4 + m_4 h^2) \ddot{\varphi} - m_4 h (R+r) \dot{\theta}^2 \sin \varphi$$

- Calcul de $\vec{\delta}(A, 3/1) \cdot \vec{z}_2$

Comme A est un point quelconque, on a par définition

$$\vec{\delta}(A, 3/1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(A, 3/1) \right]_1 + \vec{V}(A/1) \wedge m_3 \vec{V}(G_3, 3/1)$$

$$\text{et } \vec{\sigma}(A, 3/1) = \vec{I}(A, 3) \vec{\Omega}(3/1) + m_3 \overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{V}(A, 3/1)$$

Alors

$$\vec{\delta}(A, 3/1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{I}(A, 3) \vec{\Omega}(3/1) \right]_1 + m_3 \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AG_3} \right]_1 \wedge \vec{V}(A, 3/1)$$

$$+ m_3 \overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{a}(A, 3/1) + \vec{V}(A/1) \wedge m_3 \vec{V}(G_3, 3/1)$$

Comme dans ce problème

$$\vec{V}(A/1) = \vec{V}(A, 3/1)$$

et comme

$$\vec{V}(G_3, 3/1) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{CG_3} \right]_1$$

alors

$$\vec{\delta}(A, 3/1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{I}(A, 3) \vec{\Omega}(3/1) \right]_1 + m_3 \overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{a}(A, 3/1)$$

Finalement

$$\vec{\delta}(A, 3/1) \cdot \vec{z}_2 = C_3 \ddot{\varphi} + m_3 (a \ddot{y}_3 - b \ddot{x}_3) \cdot (-\dot{\theta}^2 (R + r) \vec{x}_2)$$

En conclusion

$$\vec{\delta}(A, 3/1) \cdot \vec{z}_2 = C_3 \ddot{\varphi} + m_3 \dot{\theta}^2 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi)$$

- Détermination de $\vec{M}(A, \vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{z}_2$

$$\vec{M}(A, \vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{z}_2 =$$

$$\left(\vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) - m_4 g \vec{y}_1 \wedge \vec{B}\vec{A} - m_3 g \vec{y}_1 \wedge \overrightarrow{G_3 A} + \vec{R}(1 \rightarrow 4) \wedge \vec{I}\vec{A} \right) \cdot \vec{z}_2$$

ou encore

$$\vec{M}(A, \vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{z}_2 =$$

$$-C_t + g ((m_4 h - m_3 a) \cos(\theta + \varphi) + m_3 b \sin(\theta + \varphi)) + \left(\vec{R}(1 \rightarrow 4), \vec{I}\vec{A}, \vec{z}_2 \right)$$

À partir de la notation définie dans l'énoncé pour $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$, on a alors

$$\vec{M}(A, \vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{z}_2 =$$

$$-C_t + g ((m_4 h - m_3 a) \cos(\theta + \varphi) + m_3 b \sin(\theta + \varphi)) + N_{14} h \sin \gamma + T_{14} (r - h \cos \gamma)$$

Selon que $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ est colinéaire ou non à $\vec{B}\vec{I}$, on obtient deux expressions différentes pour l'équation issue de l'équation du moment dynamique :

- si $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ est colinéaire à $\vec{B}\vec{I}$

$$\dot{\theta}^2 (m_3 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi) - m_4 h (R + r) \sin \varphi)$$

$$= -C_t + g ((m_4 h - m_3 a) \cos(\theta + \varphi) + m_3 b \sin(\theta + \varphi)) + N_{14} h \sin \gamma$$

• si $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ n'est pas colinéaire à \vec{BI}

$$(C_3 + C_4 + m_4 h^2) \ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 (m_3 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi) - m_4 h (R + r) \sin \varphi) \\ = -C_t + g ((m_4 h - m_3 a) \cos (\theta + \varphi) + m_3 b \sin (\theta + \varphi)) + N_{14} h \sin \gamma + T_{14} (r - h \cos \gamma)$$

ou encore, en utilisant les résultats précédents

$$(C_3 + m_4 h^2) \ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 (m_3 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi) - m_4 h (R + r) \sin \varphi) \\ = -C_t + g ((m_4 h - m_3 a) \cos (\theta + \varphi) + m_3 b \sin (\theta + \varphi)) + h (N_{14} \sin \gamma - T_{14} \cos \gamma)$$

5. Pour qu'il y ait contact au point I , il faut avoir

$$N_{14} > 0$$

Dans le cas où $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ n'est pas colinéaire à \vec{BI} , c'est à dire lorsque le point de contact évolue entre les points F et G ou entre les points H et E , on a

$$N_{14} = \frac{1}{h \sin \gamma} [(C_3 + m_4 h^2) \ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 (m_3 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi) - m_4 h (R + r) \sin \varphi) \\ + C_t - g ((m_4 h - m_3 a) \cos (\theta + \varphi) + m_3 b \sin (\theta + \varphi)) + h T_{14} \cos \gamma]$$

Comme $\sin \gamma$ est constamment positif pendant le fonctionnement, on obtient

$$C_t > g ((m_4 h - m_3 a) \cos (\theta + \varphi) + m_3 b \sin (\theta + \varphi)) - h T_{14} \cos \gamma - (C_3 + m_4 h^2) \ddot{\varphi} \\ + \dot{\theta}^2 (m_4 h (R + r) \sin \varphi - m_3 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi))$$

Lorsque le point de contact I se situe sur les zones à profil circulaire, la condition à remplir par le couple exercé par la barre de torsion s'écrit

$$C_t > g ((m_4 h - m_3 a) \cos (\theta + \varphi) + m_3 b \sin (\theta + \varphi)) \\ + \dot{\theta}^2 (m_4 h (R + r) \sin \varphi - m_3 (R + r) (a \sin \varphi + b \cos \varphi))$$

Comme on pouvait s'y attendre, la valeur maximale est atteinte dans la zone de changement de profil de la came et pendant la phase de décélération.

Plan

Les méthodes à retenir	140
Énoncés des exercices	141
Du mal à démarrer ?	162
Corrigés	163

Thèmes abordés dans les exercices

- décrire un système sous la forme d'un schéma-bloc
- transformer et réduire un schéma-bloc
- comprendre la transformée de Laplace
- déterminer une fonction de transfert
- proposer un modèle de comportement
- identifier une réponse
- lier les comportements temporel et harmonique
- tracer les diagrammes de Bode

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- chaînes d'énergie et chaînes d'information
- notion de système pour l'automaticien
- représentation sous forme de schéma-bloc
- manipulation et réduction de schéma-bloc
- transformées de Laplace et théorèmes associés
- entrées standards
- réponses temporelles
- lieux de transfert : diagrammes de Bode

Les méthodes à retenir

Pour décrire un système sous forme de schéma-bloc à partir d'une description

- Identifier les différents composants et les grandeurs physiques associées.
- S'appuyer sur la connaissance des structures standards des systèmes, à savoir :
 - les constituants d'une chaîne d'énergie ;
 - la structure « type » d'un système asservi.

➔ Exercices 5.1, 5.2, 5.3, 5.4

Pour décrire un système sous forme de schéma-bloc à partir d'équations différentielles

- Utiliser la transformée de Laplace.

➔ Exercices 5.9, 5.10, 5.11

Pour réduire un schéma-bloc

- Déplacer un nœud.

➔ Exercice 5.5
- Déplacer des blocs pour arriver à des formes particulières.

➔ Exercice 5.6
- Permuter des sommateurs.

➔ Exercice 5.7
- Suivre des liens pour comprendre le schéma-bloc.

➔ Exercice 5.8

Pour exprimer une fonction de transfert à partir d'un schéma bloc

- Considérer les entrées les unes après les autres.
- Superposer les réponses partielles.

➔ Exercices 5.12, 5.13

Pour élaborer un modèle de connaissance

- Exprimer les équations différentielles régissant les phénomènes mis en jeu.
- Utiliser la transformée de Laplace.
- Tracer un schéma-bloc.
- Réduire ce dernier pour exprimer la fonction de transfert.

➔ Exercices 5.10, 5.11

Pour proposer un modèle de représentation à partir d'une réponse temporelle

- Identifier la nature de la sollicitation.
- Caractériser la tangente à l'origine.
- Vérifier la présence ou l'absence d'oscillations, de dépassements éventuels.
- Confronter constatations et connaissance des réponses des modèles usuels.
- Chercher des points remarquables de la réponse expérimentale.

➔ Exercices 5.14, 5.15, 5.18, 5.19

**Pour proposer
un modèle de représentation
à partir des diagrammes de Bode**

- Identifier courbe de gain et courbe de phase.
- Rechercher les valeurs de la phase aux basses et hautes pulsations.
- Regarder la corrélation entre les pentes des asymptotes possibles du diagramme de gain et les valeurs possibles du diagramme asymptotique de phase.
- Confronter constatations et connaissance des réponses des modèles usuels.
- Chercher des points remarquables de la réponse expérimentale.

➔ **Exercice 5.20**

**Pour évaluer
la valeur d'une grandeur
en régime permanent**

- Utiliser le théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pU(p)$$

➔ **Exercices 5.10, 5.11**

**Pour évaluer
les caractéristiques d'une fonction
de transfert**

- Écrire la fonction de transfert sous forme canonique, dont on rappelle les formes pour les modèles d'ordre 1 et 2

$$F_1(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad F_2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

➔ **Exercice 5.19**

**Pour tracer
des diagrammes de Bode**

- Factoriser le plus possible la fonction de transfert.
- Commencer par les diagrammes asymptotiques de chacune des fonctions élémentaires.
- Sommer les différents termes.

➔ **Exercices 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26**

**Pour exploiter
les lieux de transfert**

- Identifier l'axe des pulsations, l'axe des gains et l'axe des phases.
- Trouver les pulsations de cassure.
- Repérer une octave, une décade.

➔ **Exercices 5.20, 5.22**

Énoncés des exercices

5.1 Antiblocage de roue

Sur un véhicule, pour contrôler la vitesse en phase de décélération, le conducteur agit sur le système de freinage par l'intermédiaire d'une pédale de frein. Les dispositifs actuels, schématisés figure 5.1, sont principalement constitués des éléments suivants :

- un maître cylindre qui génère une pression hydraulique à partir de l'effort appliqué par le conducteur sur la pédale de frein ;
- quatre cylindres de roue qui transforment la pression hydraulique en effort de freinage appliqué par les plaquettes de frein sur les disques de frein ;

- un ensemble de tuyauteries qui assurent la transmission de la pression entre le maître cylindre et les cylindres de roues.

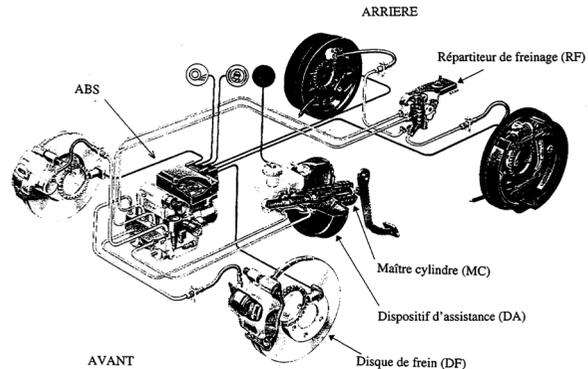


Figure 5.1 – Vue générale d'un circuit de freinage

Pour augmenter l'efficacité de ces systèmes de freinage, on leur adjoint :

- un répartiteur de freinage qui gère la répartition de pression entre les cylindres de frein avant et arrière ;
- un dispositif d'assistance qui amplifie l'effort exercé par le conducteur afin de minimiser l'effort à fournir par celui-ci ;
- un dispositif d'antiblocage de roue qui module les pressions dans les cylindres de frein afin que le conducteur conserve la maîtrise directionnelle de son véhicule en évitant le blocage des roues quelles que soient la vitesse, les caractéristiques d'adhérence au sol et l'intensité de freinage.

Dans cet exercice, on s'intéresse au dispositif d'antiblocage de roue, noté ABS – acronyme de Antilockbrakesystem.

Dans le cas d'une régulation par l'ABS, la pression au niveau des cylindres de roue est modulée par des électrovannes commandées en courant. Le calculateur du véhicule définit la vitesse optimale de rotation des roues appelée vitesse cible. C'est à partir de cette vitesse cible et de la vitesse de la roue qu'est défini le courant émis vers l'électrovanne. Cette commande est élaborée pour chaque roue quelle que soit l'action exercée par la route sur la roue. Cette action de la route sur la roue, appelée traînée, est considérée comme une perturbation pour l'ABS.

Lorsque le calculateur électronique détecte une anomalie de fonctionnement, l'ABS est déconnecté automatiquement. Les électrovannes ne sont alors plus pilotées. Le système de freinage reste bien évidemment opérationnel, mais dans ce cas sans l'assistance de l'antiblocage des roues.

1. Quelle est la grandeur réglée par l'électrovanne ?
2. Quelle est la variable asservie par l'ABS ?
3. Tracer le schéma-bloc décrivant le fonctionnement de ce système de contrôle d'attitude. Faire apparaître la perturbation.

5.2 Contrôle d'attitude de satellite

Pour qu'un satellite ait une durée de vie importante et une grande efficacité, il faut pouvoir contrôler la position de son centre de gravité et son orientation autour de ce point par rapport à un repère de référence. Le satellite est géré par :

- un dispositif de contrôle d'orbite qui régule la position de son centre de gravité ;
- un système de contrôle d'attitude chargé d'orienter le satellite.

Le contrôle d'attitude permet de :

- modifier l'orientation du satellite afin que ses panneaux solaires soient positionnés au mieux afin d'assurer l'alimentation en énergie ;
- assurer le pointage précis des instruments embarqués : antenne, télescope ...

Pour modifier l'orientation du satellite, on utilise trois roues de réaction, une sur chaque axe. Pour la suite du problème, on ne s'intéresse qu'à la commande d'un seul axe. Une roue de réaction est constituée d'un moteur électrique et d'un volant d'inertie. Le stator du moteur est lié au satellite alors que le rotor est solidaire du volant d'inertie. Une étude dynamique permet de montrer que la mise en rotation du volant d'inertie génère un couple c sur le satellite qui provoque sa rotation. Un dispositif électronique élabore la commande u du moteur électrique à partir de la différence entre l'orientation souhaitée θ_c et l'orientation réelle θ du satellite. Un capteur permet de mesurer l'orientation réelle du satellite. Par ailleurs, on modélise l'effet de la pression de radiation exercée sur les panneaux solaires du satellite par un couple résistant c_r exercé sur le satellite.

1. Si on provoque la rotation de la roue de réaction dans le sens trigonométrique, comment varie l'orientation du satellite ?
2. Un satellite géostationnaire évolue à une altitude d'environ 36 000 kilomètres. Pour certaines applications, on n'a besoin que d'une précision d'environ 1 kilomètre autour du point visé. Quelle est alors la précision souhaitée pour l'orientation du satellite ?
3. Tracer le schéma-bloc décrivant le fonctionnement de ce système de contrôle d'attitude. Faire apparaître la perturbation.

5.3 Train pendulaire

Pour assurer le confort des passagers lorsque le train aborde une courbe, il faut non seulement atténuer les défauts des voies mais également limiter la sensation physique due à l'accélération normale. Pour compenser l'effet de la courbe sur les passagers, on peut réaliser des virages en dévers. Le rail extérieur est plus haut que le rail intérieur. Cette solution n'est réalisable que lors de la création de nouvelles lignes. C'est la solution retenue sur les lignes à grande vitesse (LGV).

Sur le réseau classique, en plus du dévers de voie, il est nécessaire d'incliner la caisse de la voiture transportant les passagers, on parle alors de voiture pendulée. Ce système est indispensable pour permettre l'accès des TGV au réseau classique.

Le principe de la pendulation est schématisé figure 5.2.

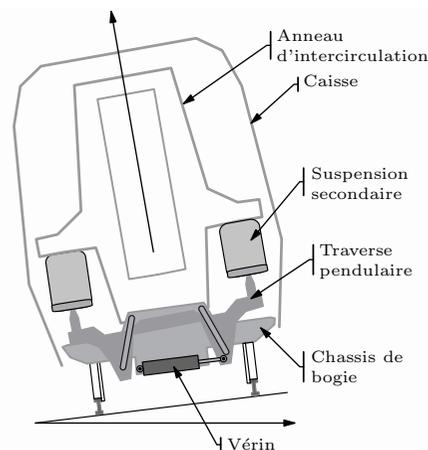


Figure 5.2 – Comportement d'une voiture en virage

L'anneau d'intercirculation est suspendu à une traverse pendulaire. Celle-ci est suspendue au bogie de manière à ce que son inclinaison soit libre. Un vérin hydraulique placé entre le bogie et la traverse pendulaire permet de régler l'inclinaison des voitures.

Afin de contrôler le mouvement de la caisse, on réalise un asservissement en position angulaire de l'ensemble {traverse pendulaire, caisse de la voiture}. La consigne de position angulaire est calculée à partir d'informations provenant notamment d'accéléromètres implantés sur les différentes voitures du train.

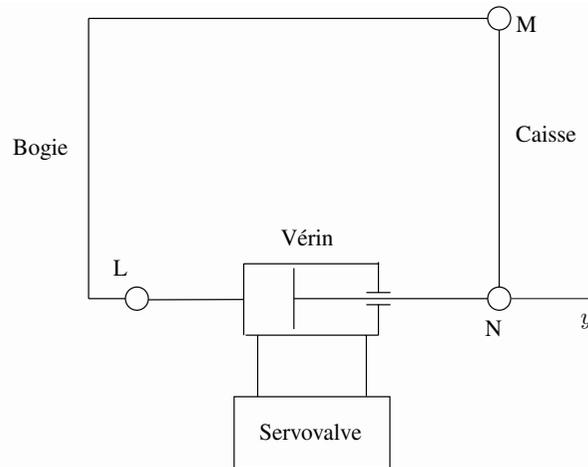


Figure 5.3 – Schéma de principe de la pendulation

Le principe de fonctionnement, présenté figure 5.3, est exposé ci-dessous.

- La caisse de la voiture pendulée est en mouvement de rotation autour d'un point M par rapport au bogie fixe.
- Ce mouvement de rotation est obtenu par le déplacement y de la tige d'un vérin double effet. L'origine de ce déplacement est la position médiane de la figure.
- Ce vérin est alimenté par un débit de fluide hydraulique q fourni par une servovalve commandée en courant i . Le débit q est proportionnel au courant d'alimentation.
- Un capteur de position mesure la position y de la tige du vérin. Il délivre une tension u_m .
- Un potentiomètre fournit une tension u_c image de la consigne de position y_c .
- Un correcteur permet d'élaborer la tension de commande u à partir de l'écart. À partir de cette tension, un convertisseur tension-courant génère le courant i qui alimente la servovalve.

1. Tracer un schéma-bloc décrivant le fonctionnement de cet asservissement de position angulaire.
2. Définir la catégorie de chaque composant de ce schéma, puis tracer les limites des parties opérative (PO) et commande (PC).

5.4 Commande en position

Afin d'empêcher l'effondrement de falaises, on fore des trous suivant un maillage régulier et on y enfonce des pieux en acier qui structurent l'ensemble et le consolident. La plateforme, à partir de laquelle on réalise la pose des tubes, doit rester en permanence parallèle à la paroi de la falaise. La commande en position de cette plateforme est assurée par un vérin hydraulique. Grâce à un dispositif cinématique, le déplacement x de la tige du vérin assure la position d de la plateforme. Afin de réguler la position de la plateforme, le vérin est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée par :

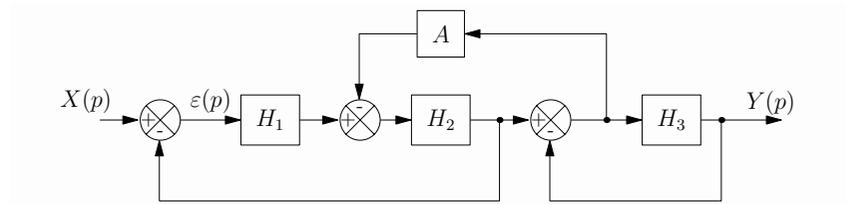
- une servovalve fournissant un débit q au vérin ;
- un capteur de position délivrant une tension Imx , image de la position réelle x de la tige du vérin ;
- un correcteur élaborant la commande u de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre l'image de la consigne de position Imx_c et l'image de la position.

La consigne de position x_c est fournie par l'intermédiaire d'un adaptateur.

1. Décrire le dispositif d'asservissement de position sous forme d'un schéma-bloc.
2. Préciser les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.
3. Faire apparaître les parties commande (Pc) et opérative (Po) sur ce schéma.

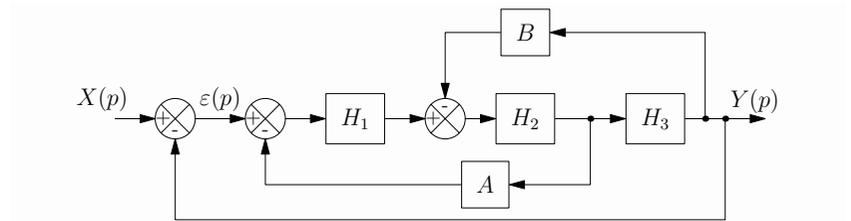
5.5 Réduction de schéma-bloc 1

Réduire le schéma-bloc ci-dessous



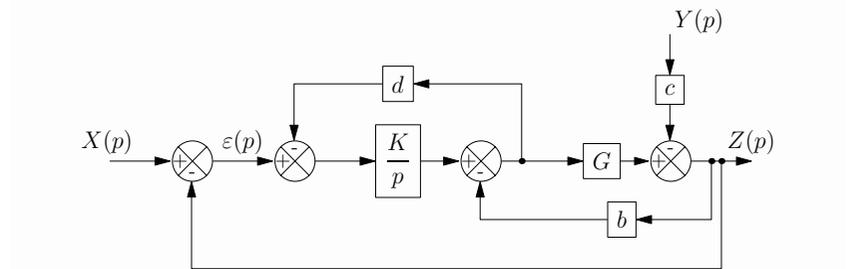
5.6 Réduction de schéma-bloc 2

Réduire le schéma-bloc ci-dessous



5.7 Réduction de schéma-bloc 3

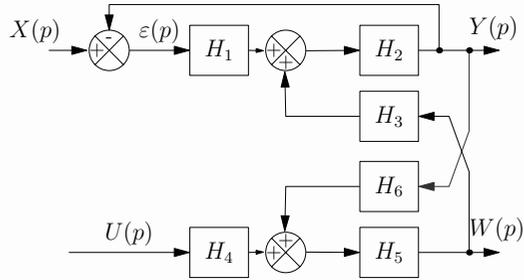
Soit le schéma-bloc dessiné ci-dessous. Il modélise un système avec une consigne $X(p)$, une sortie $Z(p)$ et une perturbation $Y(p)$. Les différents paramètres b , c , d , G et K sont des gains.



1. Réduire ce schéma-bloc.
2. Émettre un avis sur la nature des deux fonctions de transfert mises en évidence.

5.8 Réduction de schéma-bloc 4

On considère le schéma-bloc ci-dessous d'un système à deux entrées $X(p)$ et $U(p)$ et une sortie $Y(p)$.



1. On s'intéresse à la seule influence de l'entrée $X(p)$ sur la sortie $Y(p)$. Déterminer la fonction de transfert :

$$H_x(p) = \left(\frac{Y(p)}{X(p)} \right)_{U(p)=0}$$

2. On s'intéresse uniquement à la seule influence de l'entrée $U(p)$ sur la sortie $Y(p)$. Déterminer la fonction de transfert

$$H_u(p) = \left(\frac{Y(p)}{U(p)} \right)_{X(p)=0}$$

3. Quelle est l'influence simultanée des deux entrées $X(p)$ et $U(p)$ sur la sortie $Y(p)$?

5.9 Transformée de Laplace

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante

$$y''(t) + 10y'(t) + 21y(t) = 21x(t), \text{ avec } y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y'_0$$

1. Exprimer cette équation dans le domaine symbolique, à écrire sous la forme

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} X(p) + \frac{N_0(p)}{D(p)}$$

Que représentent les différents termes $\frac{N(p)}{D(p)}$, $\frac{N_0(p)}{D(p)} X(p)$ et $\frac{N_0(p)}{D(p)}$?

À la vue de ces expressions et de leurs interprétations, expliquer pourquoi en automatique, on considère presque systématiquement les conditions initiales nulles.

2. Soit une entrée en échelon unitaire. Déterminer les réponses temporelles $y(t)$ et donner l'allure de ces courbes dans les deux cas suivants :

- $y_0 = 0$ et $y'_0 = 0$
- $y_0 = 2$ et $y'_0 = 5$

On rappelle la transformée de Laplace suivante

$f(t)$	$F(p)$
$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$

3. On suppose les conditions initiales nulles et on prend comme entrée

$$x(t) = E \sin(\omega t)$$

On recherche alors une sortie sous la forme

$$y(t) = S \sin(\omega t + \varphi)$$

À quoi correspond cette sortie ?

En adoptant les notations complexes $x(t) = E e^{j\omega t}$ et $y(t) = S e^{j(\omega t + \varphi)}$, déterminer à partir de l'équation différentielle le rapport $\frac{S}{E} e^{j\varphi}$, puis conclure.

5.10 Moteur à courant continu

On s'intéresse au fonctionnement d'un moteur à courant continu.

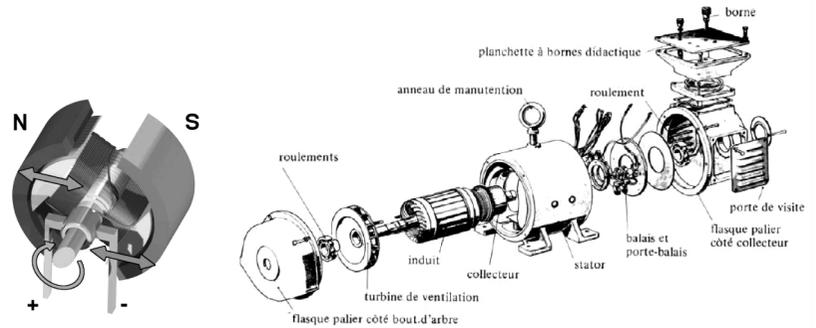


Figure 5.5 – Éclaté d'un moteur à courant continu

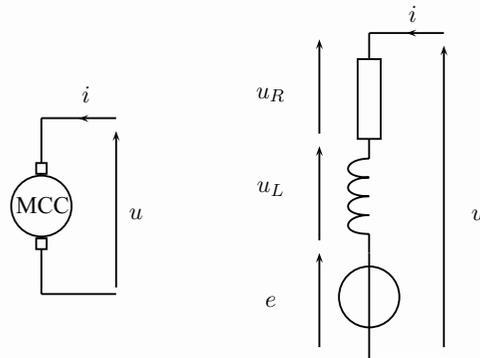


Figure 5.6 – Modèle électrique d'un MCC

Le fonctionnement d'un moteur à courant continu est décrit par le système d'équations suivant :

- Loi d'Ohm : $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$
- Équation de couplage : $e(t) = K_v \omega(t)$
- Équation de couplage : $c_m(t) = K_c i(t)$
- Principe fondamental de la dynamique : $J \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - f\omega(t)$

avec :

- i : courant d'induit (A)

- u : tension aux bornes de l'induit (V)
- e : force contre électromotrice (V)
- c_m : couple moteur (N.m)
- ω : taux de rotation du moteur (rad.s⁻¹)
- c_r : couple résistant (N.m)
- R : résistance totale : induit, balais, collecteur (Ω)
- L : inductance de l'induit (H)
- J : Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation du rotor (kg.m²)
- K_v : constante de vitesse (V.s.rad⁻¹)
- K_c : constante de couple (N.m.A⁻¹)
- f : paramètre de frottement visqueux (N.m.s.rad⁻¹)

1. Exprimer le système d'équations du moteur à courant continu dans le domaine symbolique.
2. Tracer le schéma-bloc d'un moteur à courant continu commandé en tension.
3. Dédire de ce schéma l'expression de $\Omega(p)$ en fonction de $U(p)$ et $C_r(p)$.
4. Déterminer l'expression du taux de rotation en régime permanent si l'entrée de consigne est un échelon d'amplitude U_0 et si la perturbation est supposée nulle.

5.11 Antiblocage de roue 2

La présentation du dispositif ABS est faite lors de l'exercice 5.1.

1 Modélisation de l'électrovanne

La variation de position z de la partie mobile de l'électrovanne est modélisée par :

$$M\ddot{z}(t) = Bi(t) - Kz(t) - \mu\dot{z}(t) - Sp(t)$$

avec les paramètres variables :

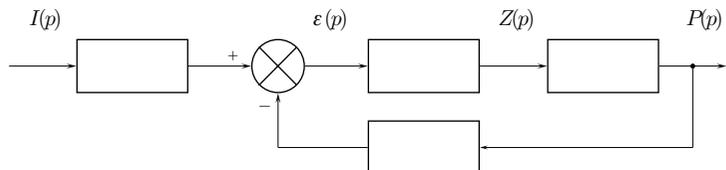
- i : courant de commande (A)
- p : pression régulée par l'électrovanne (N.m⁻²)
- z : position de l'équipage mobile (m)

et les paramètres constants :

- M : masse totale mobile (kg)
- B : constante électromagnétique de la bobine (N.A⁻¹)
- K : raideur des ressorts du centrage (N.m⁻¹)
- μ : coefficient de frottement visqueux lié à l'action du fluide sur l'équipage mobile (N.s.m⁻¹)
- S : section de réaction (m²)

La pression de freinage délivrée par l'électrovanne évolue proportionnellement à l'intégrale de la position de sa partie mobile. Le coefficient de proportionnalité, noté L , est exprimé en Pa.s⁻¹.m⁻¹.

1. Après avoir traduit la modélisation dans le domaine symbolique, compléter le schéma-bloc proposé.



2. Déterminer la fonction de transfert $\frac{P(p)}{I(p)}$.
3. Peut-on donner un sens physique à la fonction de transfert en boucle ouverte ? Pourquoi ?

2 Modélisation de l'ABS

Une étude dynamique permet de définir la vitesse de rotation ω de la roue en fonction de la pression de freinage p délivrée par l'électrovanne. Ce modèle de connaissance introduit, dans la relation entre ω et p , la composante tangentielle T de l'action de la route sur la roue telle que :

$$R(-T(t) + Cp(t)) = J\dot{\omega}(t) \text{ avec } C \text{ en m}^2.$$

avec les paramètres variables :

- R : rayon de la roue (m)
- J : moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de rotation (kg.m²)
- C : surface (m²)

Afin d'élaborer le courant de commande de l'électrovanne, on utilise un correcteur proportionnel de gain K . Le fonctionnement du capteur est décrit par : $Im_{\omega}(t) = a\omega(t)$. La consigne de vitesse est notée : ω_c .

4. À partir du schéma de l'ABS proposé page 142, tracer le schéma-bloc de l'ABS dans le domaine symbolique. Mettre ce schéma sous forme d'un schéma à retour unitaire.
5. Déterminer :

- la fonction de transfert en poursuite $H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$;
- la fonction de transfert en régulation $G(p) = \frac{\Omega(p)}{T(p)}$.

6. Préciser les expressions des gains statiques K_H et K_G de chacune de ces fonctions de transfert.

On suppose :

- la consigne de vitesse constante : $\omega_c(t) = \Omega_0$
- la traînée constante : $T(t) = T_0$

7. Déterminer l'expression littérale de la vitesse de la roue ω en régime permanent.

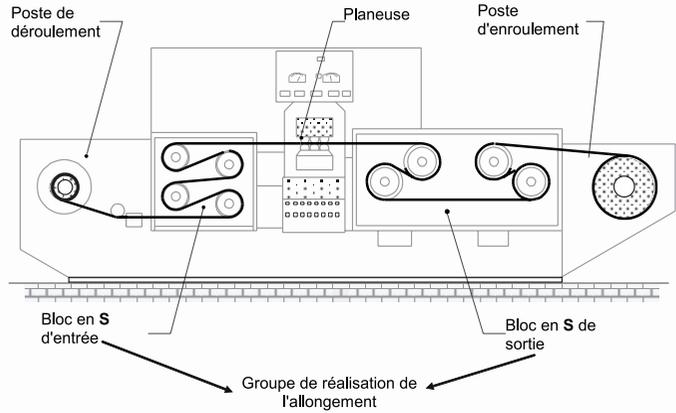
5.12 Planeuse

Une planeuse permet l'allongement réglable de bandes d'acier. La bande est déroulée à partir du poste de déroulement. La vitesse de déroulement V_e est imposée par le bloc d'entrée. La vitesse imposée par le bloc de sortie V_s est supérieure à V_e . Il y a donc allongement de la bande entre ces deux postes. La bande allongée est bobinée au poste d'enroulement.

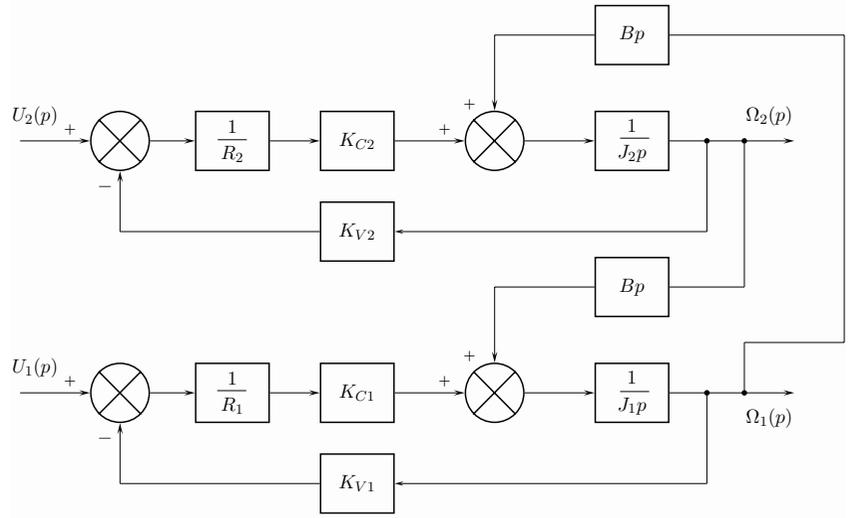
L'allongement obtenu augmente le domaine de comportement élastique du matériau utilisé.

La planeuse étudiée utilise principalement deux moteurs :

- le moteur 1 pour générer le mouvement de la bande ;
- le moteur 2 pour maîtriser l'allongement de la bande.



Les fonctionnements de ces deux moteurs sont donc liés. En effet, la variation de la tension de commande, u_1 , du moteur 1 modifie sa vitesse de rotation, ω_1 , et cette variation de vitesse perturbe la vitesse de rotation, ω_2 , du moteur 2 et réciproquement. On a alors un système modélisable par le schéma suivant :



avec :

- R_1 et R_2 : résistance en Ω
- K_{C1} et K_{C2} : constante de couple en $N.m.A^{-1}$
- K_{V1} et K_{V2} : constante de vitesse en $V.s.rad^{-1}$
- J_1 et J_2 : moment d'inertie en $kg.m^2$

Afin d'alléger les notations, on note

$$K_1 = K_{C1} = K_{V1}$$

$$K_2 = K_{C2} = K_{V2}$$

1. Déterminer l'unité de gain B .

2. Déterminer les fonctions de transfert $H_{11}(p)$ et $H_{12}(p)$ telles que

$$\Omega_1(p) = H_{11}(p)U_1(p) + H_{12}(p)U_2(p)$$

On peut trouver de la même manière des fonctions de transfert $H_{21}(p)$ et $H_{22}(p)$ telles que

$$\Omega_2(p) = H_{21}(p)U_1(p) + H_{22}(p)U_2(p)$$

Chaque moteur est asservi en vitesse avec une génératrice tachymétrique chargée de mesurer sa vitesse de rotation. La tension de commande de chaque moteur est élaborée par un correcteur à partir de l'écart entre l'image de la consigne de vitesse et l'image de la vitesse de rotation. On note : $GT_1(p)$, $GT_2(p)$, $C_1(p)$ et $C_2(p)$ les fonctions de transfert respectivement des génératrices tachymétriques et des correcteurs des moteurs 1 et 2. Les génératrices tachymétriques sont assimilées à des gains purs tels que : $GT_1(p) = G_1$ et $GT_2(p) = G_2$. Les correcteurs utilisés sont des correcteurs proportionnels de gain respectif : K_1 et K_2 .

- Tracer le schéma-bloc décrivant l'asservissement des moteurs 1 et 2 en faisant apparaître notamment $H_{11}(p)$, $H_{12}(p)$, $H_{21}(p)$ et $H_{22}(p)$.
- Déterminer l'expression de $\Omega_1(p)$ en fonction de $\Omega_{1C}(p)$, la vitesse de consigne du moteur 1, et de $U_2(p)$.

5.13 Restituteur d'effort

Le restituteur d'effort étudié a pour objectif de créer une sensation d'effort pour le conducteur au niveau de la pédale d'embrayage alors que la commande d'embrayage est électrique. L'asservissement consiste à réguler la différence entre l'effort appliqué, et donc ressenti, par le conducteur sur la pédale, f_p , et l'effort appliqué sur la butée d'embrayage, f_e .

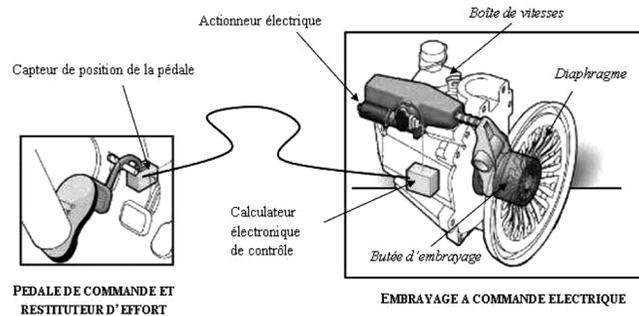
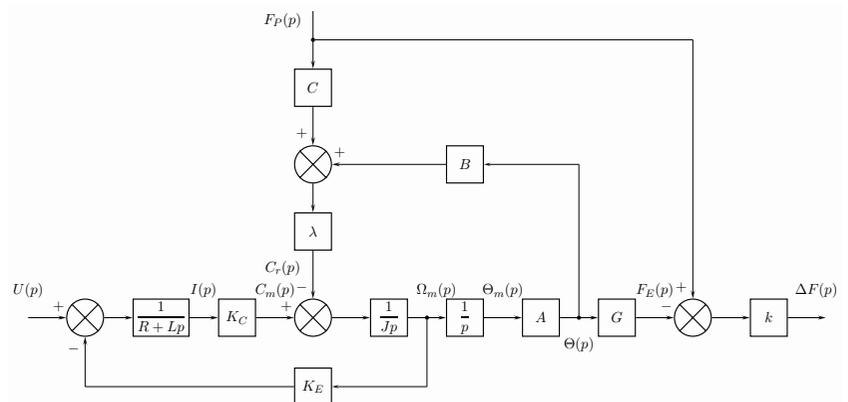


Figure 5.6 – D'après document Valéo

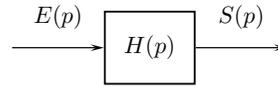
Afin d'être dans le domaine linéaire, l'étude est faite autour d'un point de fonctionnement. Le processus peut être modélisé par le schéma suivant :



1. Quelles sont les unités des gains A , B et C si λ représente le pas d'une vis ?
2. Déterminer $H_1(p)$ et $H_2(p)$ tels que $\Delta F(p) = H_1(p)U(p) + H_2(p)F_p(p)$.
3. Le processus précédent est asservi : quelle est la grandeur contrôlée ?

5.14 Modèle de comportement

Soit un système décrit par le schéma suivant :



Afin de trouver son modèle de comportement, on soumet ce système à une entrée en échelon d'amplitude 2.

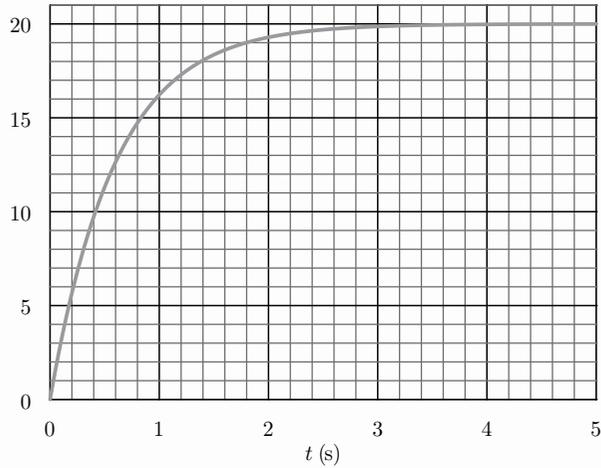
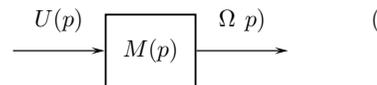


Figure 5.7 – Réponse à un échelon d'amplitude 2

1. Proposer un modèle de comportement possible pour le système testé. Donner la forme de la fonction de transfert correspondante.
2. Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert envisagée.

5.15 Essai moteur

Un moteur à courant continu peut être décrit par le schéma suivant :



On réalise un essai indiciel d'un moteur à courant continu qui met en rotation une charge. La réponse obtenue est tracée sur la figure 5.8.

1. Proposer un modèle de comportement pour le moteur.
2. Déterminer les valeurs des paramètres caractéristiques du modèle de comportement.

Les équations de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettent d'établir que son modèle de connaissance est d'ordre 2, et on note

$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + Ap + Bp^2}$$

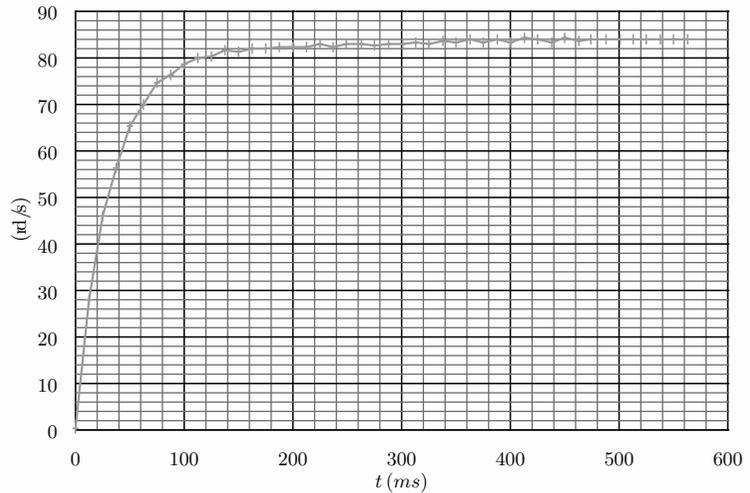
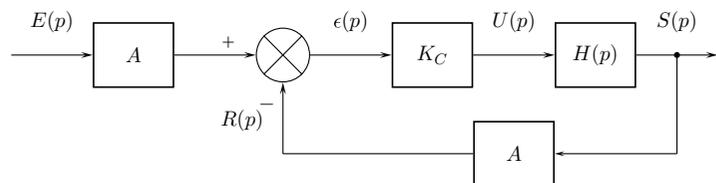


Figure 5.8 – Échelon d’amplitude 12 Volts - fréquence d’acquisition : 80 Hz

3. À la vue de la réponse du moteur, quel type de modèle d’ordre 2 proposer ?
4. Donner l’expression de la réponse indicielle d’un tel système.
5. Exprimer en conclusion les conditions vérifiées par les caractéristiques d’un modèle du deuxième ordre ayant ce type de réponse.

5.16 Essai indiciel

Le système étudié est modélisé par le schéma suivant :



On souhaite déterminer un modèle de comportement du système en boucle ouverte.

La fonction de transfert du capteur et du transducteur est un simple gain tel que : $A = 0,2$.

On règle le gain du correcteur à $K_C = 5$. L’amplitude de l’échelon d’entrée est fixée à 10. La réponse en boucle fermée du système est donnée ci-dessous sur la figure 5.9.

1. Quel peut être l’ordre du système en boucle fermée ?
2. Donner la forme générale de la fonction de transfert en boucle fermée.
3. Déterminer les paramètres caractéristiques de cette fonction de transfert.
4. Proposer une forme générale de $H(p)$ compatible avec la fonction de transfert en boucle fermée.
5. On suppose que $H(p)$ n’a pas de zéro. Déterminer les paramètres caractéristiques de $H(p)$.
6. Quelle valeur doit-on donner à K_C pour que la réponse indicielle en boucle fermée soit la plus rapide possible ? Déterminer le temps de réponse correspondant.
7. Pourquoi n’a-t-on pas réalisé un essai en boucle ouverte ?

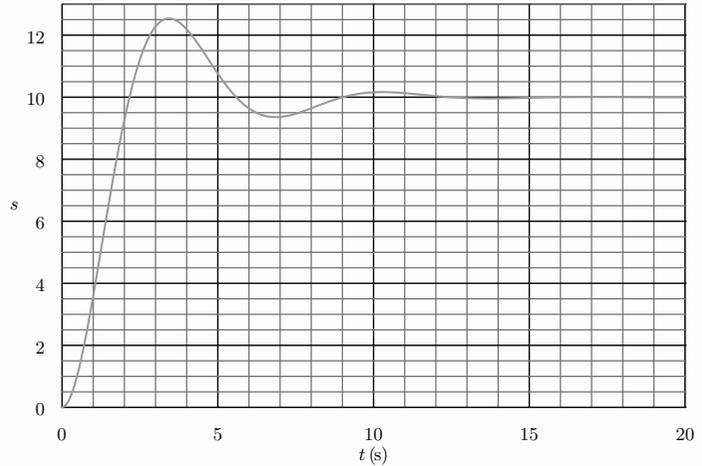


Figure 5.9 – Réponse à un échelon d’amplitude 10

5.17 Essais harmoniques

On réalise une succession d’essais harmoniques sur un système asservi en position angulaire, en faisant varier la fréquence f du signal d’entrée :

- le signal sinusoïdal d’entrée est tel que

$$e(t) = E_0 \sin(2\pi ft)$$

- son amplitude est fixée à 5° .

Pour chaque essai, on relève la valeur de l’amplitude S_0 du signal de sortie et son déphasage temporel par rapport au signal d’entrée.

À l’issue de cette campagne d’essais, on établit le tableau de mesures suivant :

Fréquence	S_0	Déphasage
Hz	degré	ms
0,2	15	20
0,8	14,8	18
1,5	14,7	19
6	12	18
8	10,5	16
11	8,8	14
15	6,6	11
45	2,4	4,5
80	1,6	3
160	0,8	1,5

1. Calculer, pour chaque fréquence testée, la valeur du gain en décibel et de la phase en degré de la fonction de transfert.
2. Tracer les diagrammes de Bode expérimentaux.
3. Donner une forme possible pour la fonction de transfert du système étudié. Déterminer les valeurs numériques caractéristiques de cette fonction de transfert.

5.18 Transmission

Une transmission électro-hydraulique est schématisée sur la figure 5.10 et modélisée sous forme de schéma-bloc sur la figure 5.11 :

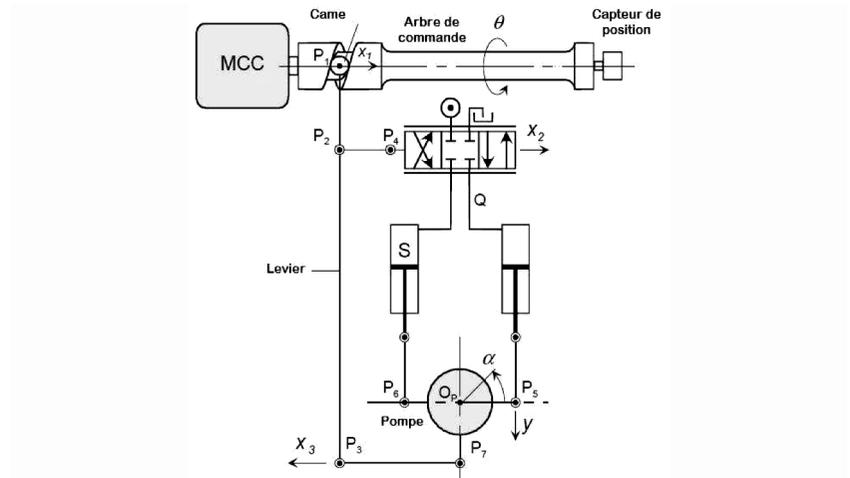


Figure 5.10 – Schéma de la transmission

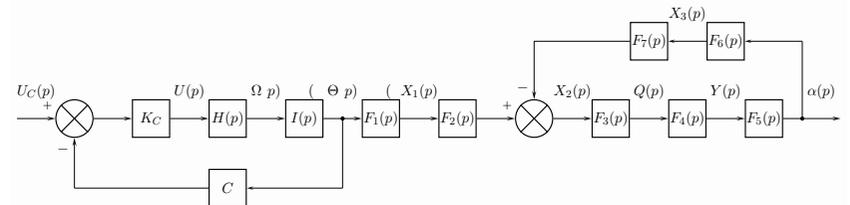


Figure 5.11 – Schéma-bloc de la transmission

Cahier des charges

- Rapidité : temps de réponse à 5 % inférieur à 1 s.
- Stabilité : pas de dépassement pour la réponse indicielle.
- Précision : écart nul pour une entrée en échelon.

Donnée

$$C = 2 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$$

Le résultat d'un essai indiciel du moteur électrique est proposé sur la figure 5.12.

1. À partir de la réponse indicielle fournie, proposer une expression pour la fonction de transfert $H(p)$ du moteur.
2. Après avoir rappelé l'équation différentielle liant la position angulaire $\theta(t)$ au taux de rotation $\omega(t)$, déterminer $I(p)$.
3. Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Theta(p)}{U_C(p)}$, puis trouver l'expression et la valeur du gain statique.

La figure 5.13 représente l'évolution temporelle de θ lorsque le signal u_C est un échelon de 2 Volts. Le gain du correcteur est réglé à $K_C = 4,2 \cdot 10^{-3}$.

4. La valeur finale est-elle cohérente avec la valeur du gain statique précédemment déterminée ?

5. Quelle valeur limite peut prendre K_C pour respecter le cahier des charges du point de vue stabilité ?
6. Pour la valeur limite de K_C déterminée, trouver le temps de réponse à 5 %. Conclure.

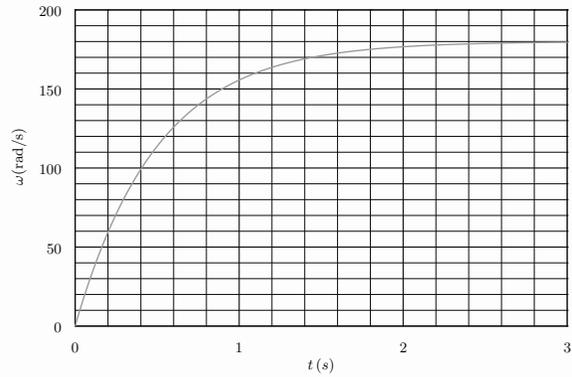


Figure 5.12 – Réponse à un échelon d’amplitude 12 Volts

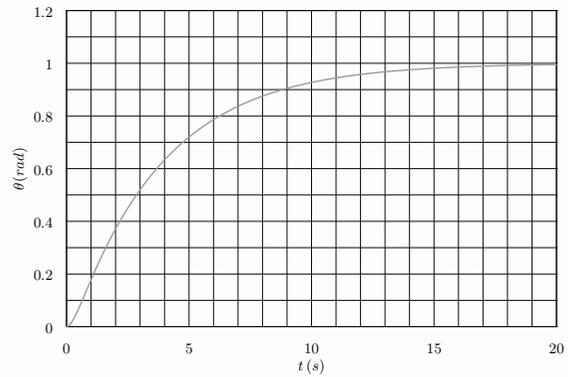


Figure 5.13 – Réponse à un échelon d’amplitude 2 Volts

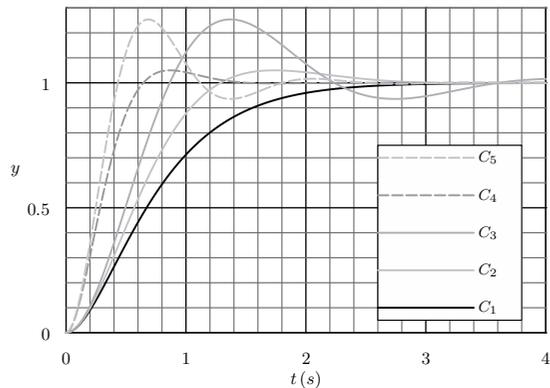
5.19 Recherche ordre 2

Soit un système décrit par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{10 + 3,2p + 1,6p^2}$$

On propose cinq réponses à un échelon d’amplitude 2.

1. Quelle est la réponse correspondant au système décrit par $H(p)$?



5.20 Identification

Un système asservi est décrit par le schéma ci-dessous :

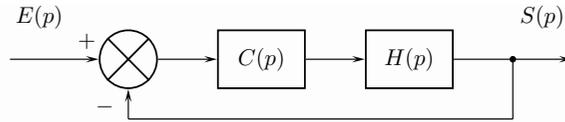


Figure 5.14 – Schéma-bloc du système asservi

avec :

- $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur, tel que

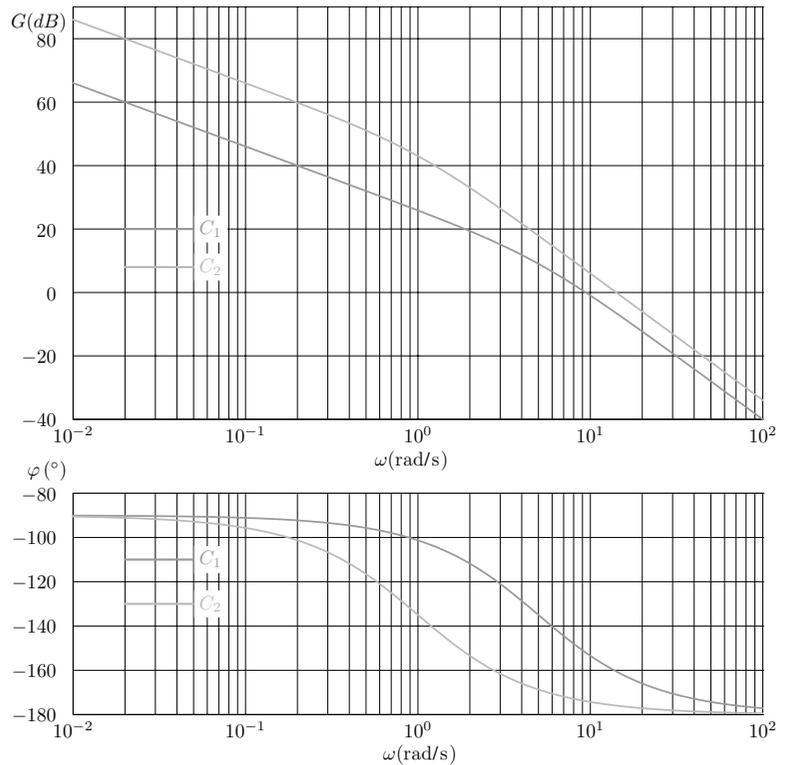
$$C(p) = 20 \left(1 + \frac{1}{4p} \right)$$

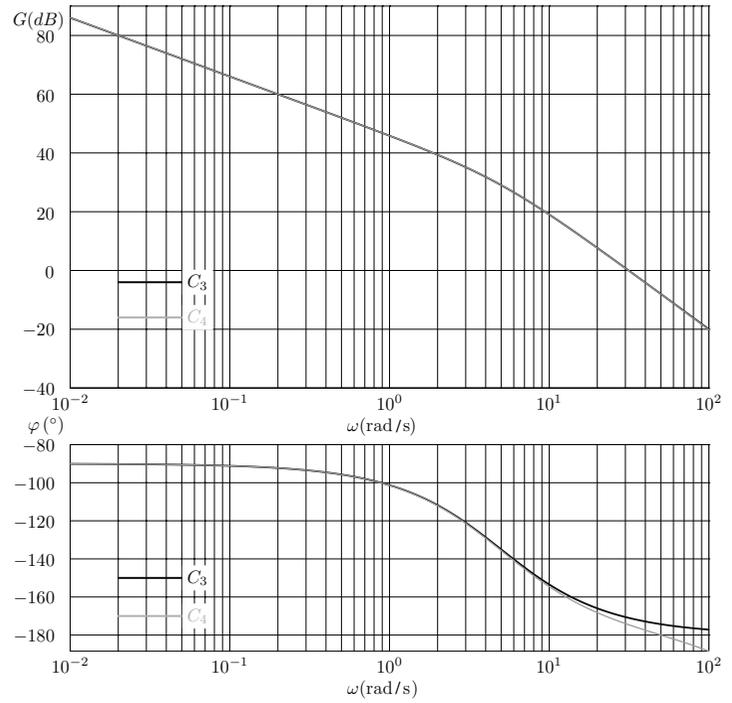
- $H(p)$ la fonction de transfert du système commandé

$$H(p) = \frac{40}{1 + 4,2p + 0,8p^2}$$

En vue d'une étude de stabilité, on a tracé les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$.

1. Parmi les quatre couples de diagrammes de Bode proposés ci-dessous, déterminer en justifiant celui ou ceux correspondant à $B(p)$.





5.21 Réponse sinusoïdale

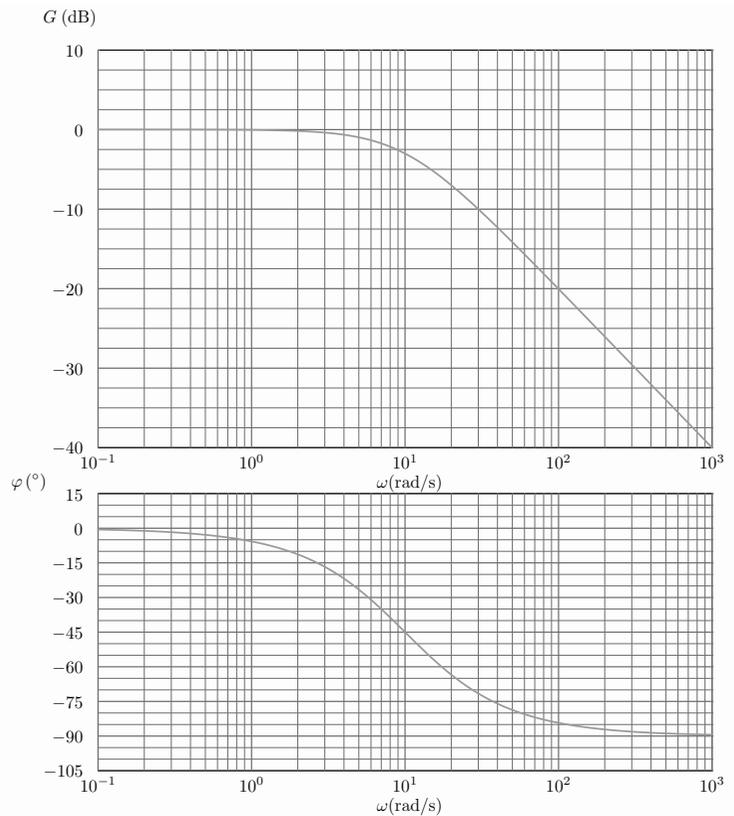


Figure 5.15 – Les deux diagrammes de Bode

Soit un système décrit par la fonction de transfert

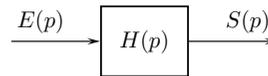
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + 0,1p}$$

La représentation du lieu de transfert de $H(j\omega)$ dans les plans de Bode est fournie sur la figure 5.15.

1. Si le signal d'entrée est un sinus de pulsation $0,5 \text{ rad.s}^{-1}$, l'amplitude du signal de sortie est-elle atténuée par rapport à celle du signal d'entrée ? Justifier.
2. Le signal d'entrée est défini par $e(t) = 10 \sin(t) + 2 \sin(30t)$. Déterminer l'expression du signal de sortie. Conclure.

5.22 Bode ordre 1

Soit un système décrit par le schéma suivant



On s'intéresse à un système du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}, \text{ avec } K > 0 \text{ et } \tau > 0$$

Pour les tracés, prendre $K = 3$ pour le gain statique et $\tau = 0,2 \text{ s}$ pour la constante de temps.

1. Donner l'expression de la fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$.

Pour tracer rapidement les diagrammes de Bode, on réalise d'abord le tracé des diagrammes asymptotiques qui s'obtiennent à partir d'approximations de la fonction de transfert harmonique.

2. Déterminer une expression approchée de la fonction de transfert harmonique, notée $H_a(j\omega)$, pour des pulsations telles que : $\omega\tau \ll 1$, puis pour des pulsations telles que : $\omega\tau \gg 1$.
3. Reproduire et compléter alors le tableau suivant :

	ω	$\frac{1}{\tau}$
	$H_a(j\omega)$	
gain asymptotique en décibel	$G_{dB_a}(\omega)$	
phase asymptotique	$\varphi_a(\omega)$	

4. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode.

Évaluation de l'écart entre les diagrammes réels et les diagrammes asymptotiques.

5. Rappeler les expressions :

- du gain en décibel du système, G_{dB} ;
- de la phase du système, φ .

6. Reproduire et compléter le tableau suivant :

ω	$\frac{1}{16\tau}$	$\frac{1}{4\tau}$	$\frac{1}{2\tau}$	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{2}{\tau}$	$\frac{4}{\tau}$	$\frac{16}{\tau}$
$ \varphi(\omega) - \varphi_a(\omega) $							
$G_{dB}(\omega) - G_{dB_a}(\omega)$							

7. Conclure sur la pertinence des diagrammes asymptotiques.

5.23 Bode ordre 2 apériodique

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$ et de fonction de transfert $H(p)$ du deuxième ordre simple

$$H(p) = \frac{40}{1 + 2,04p + 0,08p^2}$$

1. Déterminer le gain statique K , la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement ξ .
2. Déterminer les pôles de la fonction de transfert puis écrire $H(p)$ sous la forme

$$\frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}, \text{ avec } \tau_1 \geq \tau_2$$

3. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode.
4. Les asymptotes basses et hautes pulsations du diagramme de gain se coupent en un point d'abscisse ω_0 . Montrer que ω_0 est le milieu du segment $\left[\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2} \right]$.
5. Tracer l'allure du diagramme réel de gain. Préciser $G_{dB}(\omega_0)$ et $\varphi(\omega_0)$.

5.24 Bode ordre 2

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$ et de fonction de transfert $H(p)$ du deuxième ordre simple

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pour les tracés demandés, prendre comme valeurs

$$K = 18 \quad \omega_0 = 4 \text{ rad s}^{-1} \quad \xi = 0,5$$

1. Donner l'expression de la fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$.
2. Retrouver ces deux caractéristiques d'un système d'ordre 2 :
 - gain à la pulsation de cassure :

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 20 \log(2\xi)$$

- phase à la pulsation de cassure :

$$\varphi(\omega_0) = -90^\circ.$$

Pour tracer un diagramme de Bode, on réalise d'abord le tracé du diagramme asymptotique. Ce tracé est établi à partir de formes approchées de la fonction de transfert harmonique.

3. Déterminer une expression approchée de la fonction de transfert harmonique, notée $H_d(j\omega)$, pour des pulsations telles que : $\omega \ll \omega_0$, puis pour des pulsations telles que : $\omega \gg \omega_0$.
4. Reproduire et compléter alors le tableau suivant :

	ω	ω_0	
		$H_a(j\omega)$	
gain asymptotique en décibel	$G_{dB_a}(\omega)$		
phase asymptotique	$\varphi_a(\omega)$		

5. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode, en utilisant les valeurs numériques proposées.

Position du diagramme de gain par rapport aux asymptotes

6. Rappeler les expressions :

- du gain en décibel du système, G_{dB} ;
- de la phase du système, φ .

7. Justifier l'existence d'une pulsation de résonance pour l'exemple traité, puis déterminer sa valeur.

8. Définir le facteur de surtension puis déterminer la valeur maximale du gain en décibel.

9. Pour un système d'ordre 2 résonant, le diagramme réel de gain est-il constamment au dessus des asymptotes ?

10. Tracer l'allure du diagramme réel de gain.

5.25 Bode ordre 3

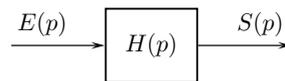
Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$ et de fonction de transfert $H(p)$ caractérisé par

$$H(p) = \frac{10}{p(1 + 0,6p + p^2)}$$

1. Exprimer la classe de la fonction de transfert, puis déterminer le gain statique K , la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement ξ .
2. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode.
3. Tracer l'allure du diagramme réel de gain, en précisant les valeurs remarquables.

5.26 Lieux de transfert

Soit un système décrit par le schéma-bloc suivant :



On envisage différents systèmes :

$$H_1(p) = \frac{500}{(1 + 80p)(100 + 400p + 111p^2)}$$

$$H_2(p) = \frac{2p^2 + 21p + 10}{50p \left(1 + 0,01p + \left(\frac{p}{90} \right)^2 \right)}$$

$$H_3(p) = \frac{70}{p(p^2 + 0,8p + 4)(100p + 7)}$$

Pour chacun de ces trois systèmes :

1. Déterminer l'ordre, la classe et le gain statique K de la fonction de transfert.
2. *A priori*, quelles sont les pentes de l'asymptote hautes pulsations et de l'asymptote basses pulsations du diagramme asymptotique de gain ?
3. Quelles sont les phases aux basses et aux hautes pulsations ?
4. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode.
5. Préciser l'allure des courbes réelles.

Du mal à démarrer ?

5.1 Les informations sont dans le texte de présentation. Il faut identifier les différents éléments et les grandeurs physiques associées.

5.2 1. Envisager un référentiel pour comprendre les mouvements.

2. Faire un schéma, et évaluer les ordres de grandeur des dimensions concernées.

5.3 - 5.4 Les informations sont toutes dans le texte de présentation. Il est également utile de se rappeler les constituants des chaînes d'énergie et d'information.

5.5 Commencer par déplacer un nœud pour que les boucles soient concentriques.

5.6 Plusieurs méthodes sont possibles. Il est suggéré, pour s'entraîner, de sortir toutes les fonctions de transfert de l'intérieur des boucles, en quatre étapes.

5.7 1. Sortir par exemple le bloc K/p par la gauche, et le bloc G par la droite pour pouvoir permuter deux soustracteurs afin d'obtenir des boucles concentriques.

2. Donner les caractéristiques des différentes fonctions de transfert, en ne considérant qu'une seule entrée à chaque fois.

5.8 1. Suivre les différents chemins pour « détordre » le schéma-bloc.

5.9 1. Ne pas oublier les conditions initiales. On rappelle la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

$$f(t) \mapsto F(p)$$

$$f(t) \mapsto pF(p) - f_0$$

2. Décomposer en éléments simples, sans oublier l'entrée.

5.10 4. Utiliser le théorème de la valeur finale.

5.11 1. Relire attentivement la dernière phrase du texte de présentation.

3. Le système étudié est-il un système asservi ?

7. Utiliser le théorème de la valeur finale.

5.12 1. Identifier les unités des grandeurs au niveau des sommateurs.

2. Annuler successivement chacune des entrées, puis sommer.

3. S'inspirer du schéma-bloc initial.

5.13 1. Partir des unités de grandeurs connues, $C_r(p)$ par exemple, et se rappeler que le pas d'une hélice s'exprime en mètre par radian.

2. Annuler successivement chacune des entrées, puis sommer.

5.14 Ne pas oublier l'entrée, sans laquelle la réponse ne peut être interprétée. Une fois l'entrée bien identifiée, on s'intéresse habituellement à la tangente à l'origine et à la présence ou non d'oscillations pour faire des propositions.

5.15 1. Ne pas oublier l'entrée, sans laquelle la réponse ne peut être interprétée, et faire appel aux caractéristiques des modèles élémentaires connus.

3. Les modèles d'ordre 2 sont caractérisés par la valeur du coefficient d'amortissement.

5.16 3. S'intéresser à la valeur relative du premier dépassement, dont on rappelle l'expression

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

4. Quel est le gain de la FTBF ?

5.17 1. Convertir toutes les unités, sachant qu'un retard de 360° correspond à un retard d'une période.

5.19 Identifier et exploiter les caractéristiques du système étudié.

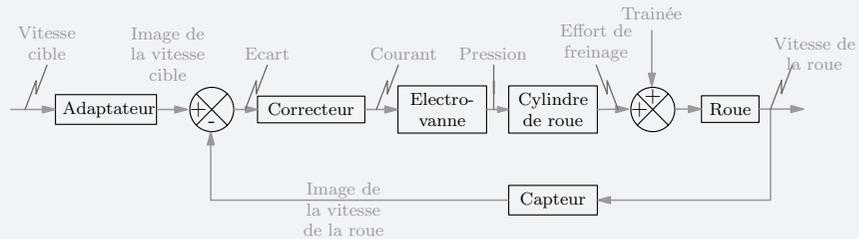
5.20 Bien faire la différence entre la fonction de transfert en boucle ouverte et la fonction de transfert en boucle fermée.

5.21 Revenir à la définition du gain.

Corrigés des exercices

5.1 Antiblocage de roue

1. La pression d'alimentation des cylindres de roue est réglée par l'électrovanne.
2. La vitesse de la roue est asservie par l'ABS.
3. Schéma-bloc



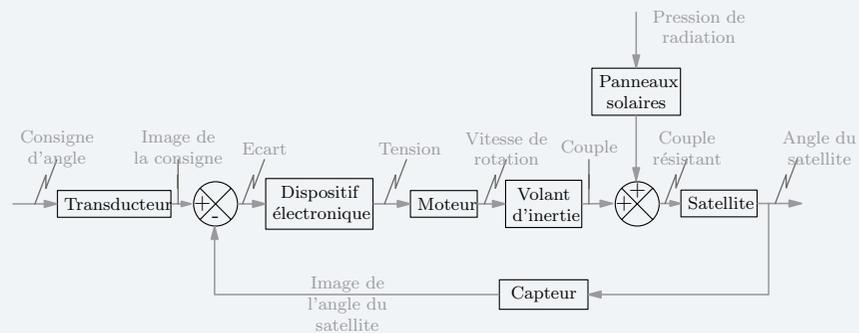
5.2 Contrôle d'attitude de satellite

1. Si la rotation imposée au volant d'inertie est dans le sens trigonométrique, alors le satellite va tourner dans le sens opposé, donc dans le sens négatif.
2. Si on assimile l'arc à la corde, on peut définir l'erreur maximale d'orientation $\Delta\theta$ par :

$$\Delta\theta = \frac{d}{R}$$

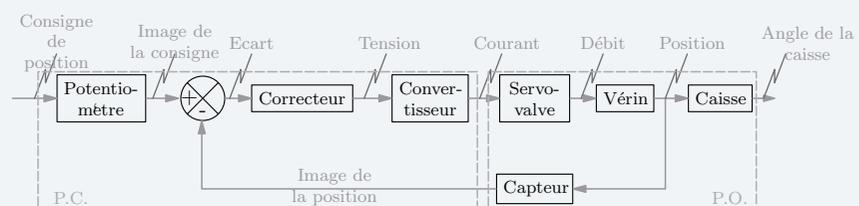
Dans cette relation, d représente l'erreur de pointage admise et R le rayon sur lequel se situe le satellite. On obtient une erreur maximale de $1,6 \cdot 10^{-3}$ degré.

3. Schéma-bloc



5.3 Train pendulaire

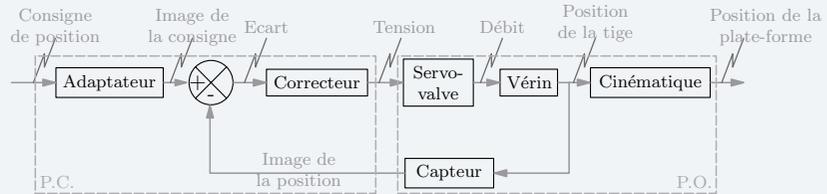
1. Schéma-bloc



2. On regroupe les informations dans un tableau

Transducteur	: Potentiomètre
Préactionneur	: Servovalve
Actionneur	: Vérin
Effecteur	: Caisse

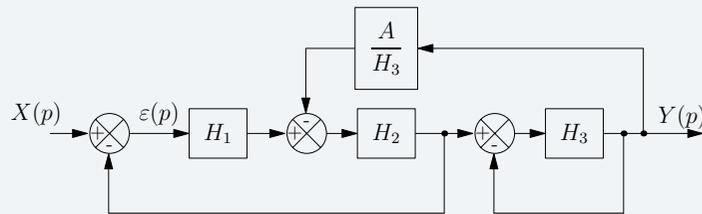
5.4 Commande en position



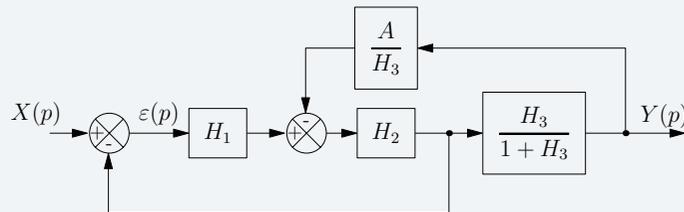
5.5 Réduction de schéma-bloc 1

On propose ci-dessous un exemple de résolution à partir de transformations du schéma-bloc :

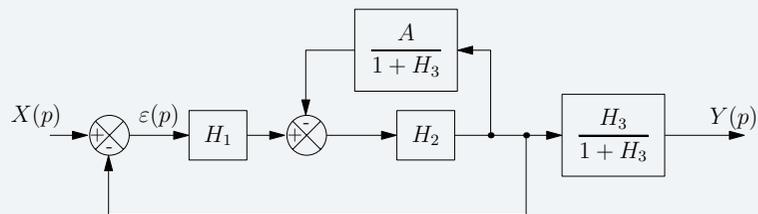
- déplacement du point de prélèvement de la boucle supérieure à droite de $H_3(p)$



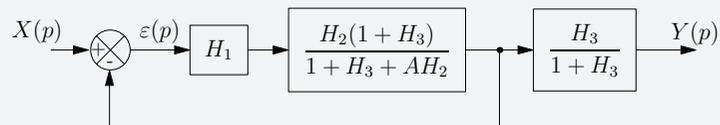
- réduction troisième boucle



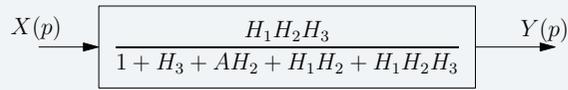
- déplacement du point de prélèvement de la boucle supérieure à gauche de $\frac{H_3(p)}{1+H_3(p)}$



- réduction de boucles concentriques



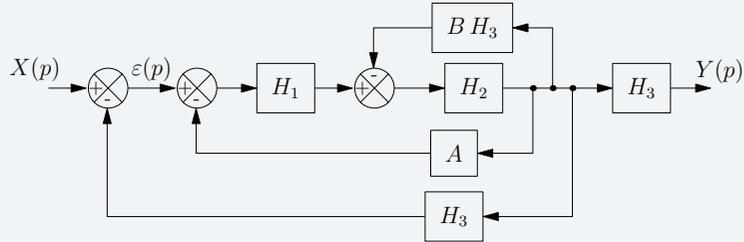
- réduction finale



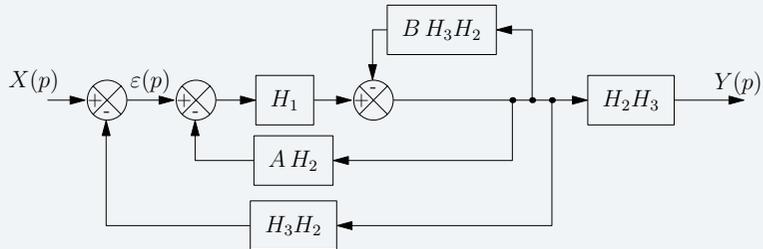
5.6 Réduction de schéma-bloc 2

On se propose pour résoudre cet exercice de sortir toutes les fonctions de transfert de l'intérieur des boucles :

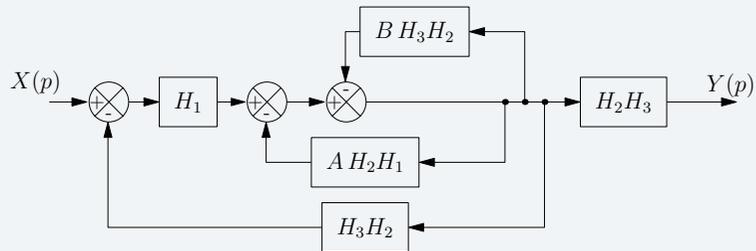
- sortir la fonction H_3 de la boucle ;



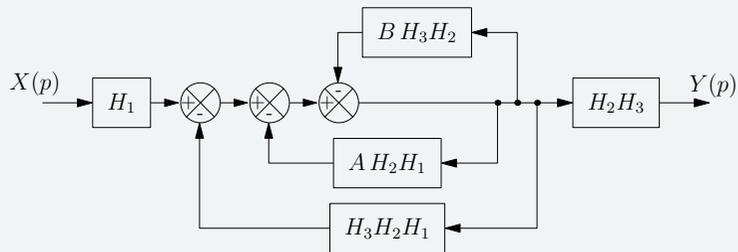
- sortir la fonction H_2 des boucles ;



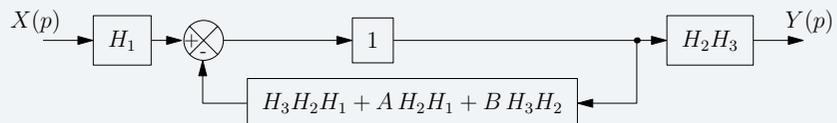
- sortir la fonction H_1 des boucles...



... en deux étapes.



On est en présence de trois boucles concentriques qui prélèvent au même point et dont les sommateurs sont juxtaposés, c'est à dire non séparés par des fonctions de transfert : elles se réduisent à une seule boucle avec la somme des opérateurs des boucles dans le retour.



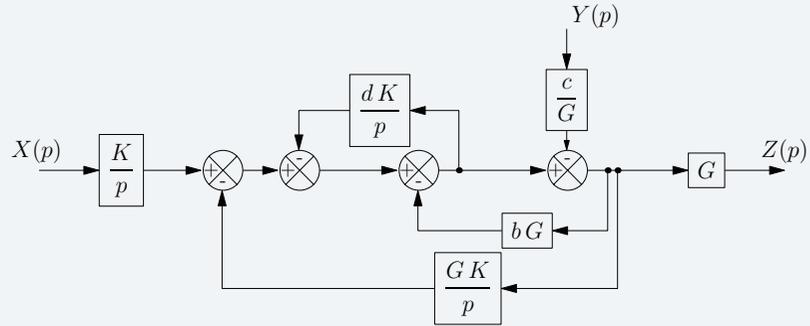
On obtient l'expression finale

$$X(p) \rightarrow \boxed{\frac{H_1 H_2 H_3}{1 + H_3 H_2 H_1 + A H_2 H_1 + B H_3 H_2}} \rightarrow Y(p)$$

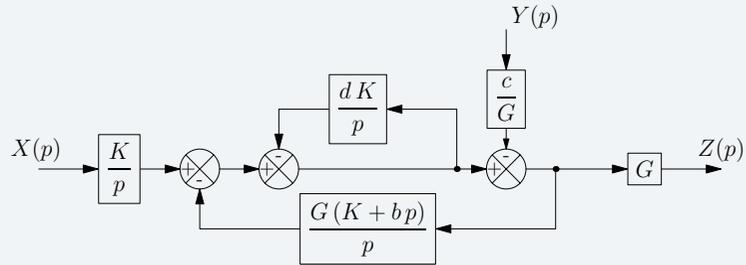
5.7 Réduction de schéma-bloc 3

1. Exemple de réduction du schéma-bloc :

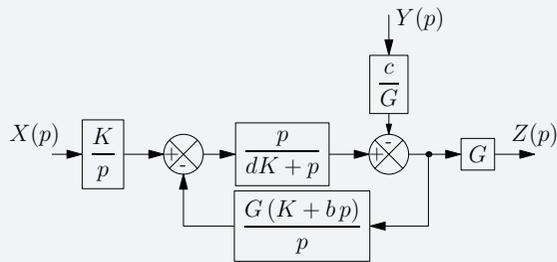
- sortir les deux blocs placés entre les sommateurs pour pouvoir les permuter afin de rassembler les deux boucles inférieures ;



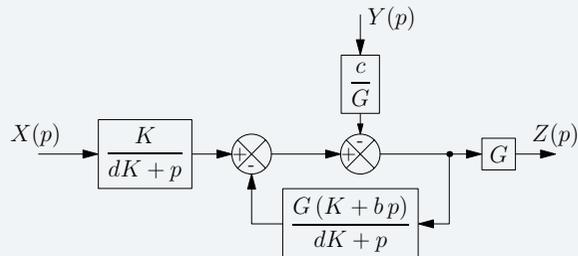
- permuter les soustracteurs et rassembler les deux boucles inférieures en une seule ;



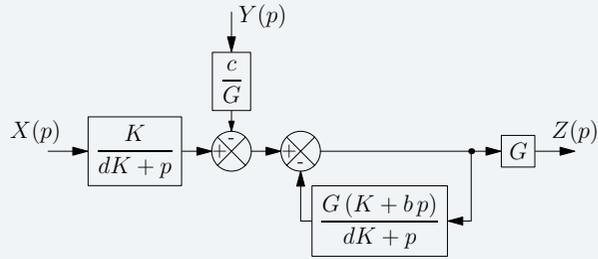
- réduire la boucle intérieure ;



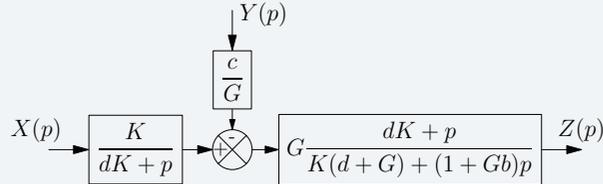
- sortir la fonction de transfert placée entre des sommateurs pour pouvoir les permuter...



... en deux étapes ;



• réduire la dernière boucle.



Apparaissent les deux fonctions de transfert recherchées :

• en considérant l'entrée $Y(p)$ nulle

$$H_x(p) = \left(\frac{Z(p)}{X(p)} \right)_{Y(p)=0} = \frac{K}{K(d+G) + (1+Gb)p}$$

• en considérant l'entrée $X(p)$ nulle

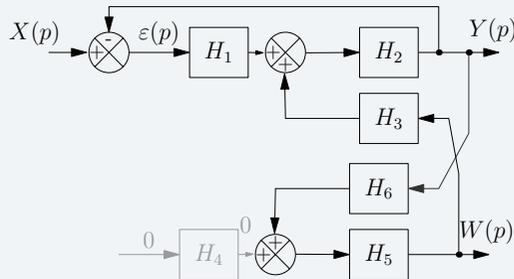
$$H_y(p) = \left(\frac{Z(p)}{Y(p)} \right)_{X(p)=0} = \frac{c}{G} \frac{dK+p}{K(d+G) + (1+Gb)p}$$

2. Émettre un avis sur les deux fonctions de transfert mises en évidence :

- $H_x(p)$ est une fonction de transfert d'un système du premier ordre simple, de gain statique $\frac{1}{d+G}$ et de constante de temps $\frac{1+Gb}{K(d+G)}$;
- $H_y(p)$ est une fonction de transfert d'un système du premier ordre généralisé, de gain statique $\frac{cd}{G(d+G)}$.

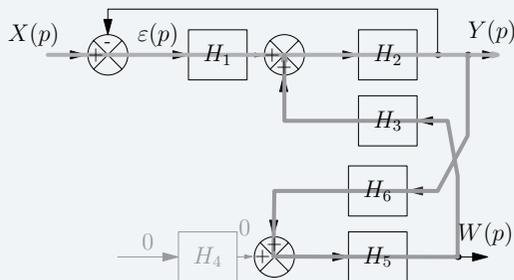
5.8 Réduction de schéma-bloc 4

1. On s'intéresse à l'influence de l'entrée $X(p)$ sur la sortie $Y(p)$ en l'absence de $U(p)$; on pose donc $U(p) = 0$ sur le schéma-bloc. La grandeur qui sort de $H_6(p)$ est alors celle qui entre dans $H_5(p)$.

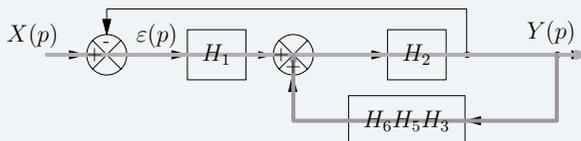


Il est intéressant de suivre les différents chemins possibles pour comprendre le schéma :

- le chemin direct de $X(p)$ à $Y(p)$, via le soustracteur, la boîte H_1 , le sommateur et la boîte H_2 ;
- le retour unitaire de la sortie $Y(p)$ au soustracteur ;
- le retour de la sortie $Y(p)$ au sommateur, via les boîtes H_6 , H_5 et H_3 .



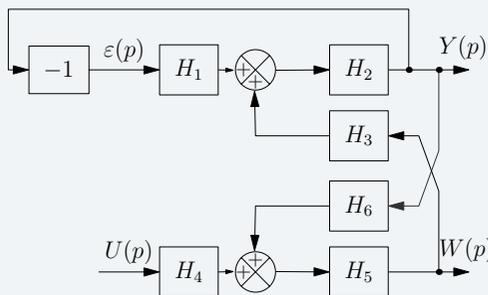
Comprendre le troisième chemin permet de « détordre » le schéma-bloc initial et de proposer un schéma-bloc équivalent.



Il reste à réduire les deux boucles concentriques

$$H_x(p) = \left(\frac{Y(p)}{X(p)} \right)_{U(p)=0} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 + H_2 H_3 H_5 H_6}$$

2. On s'intéresse à l'influence de l'entrée $U(p)$ sur la sortie $Y(p)$ en l'absence de $X(p)$; on pose donc $X(p) = 0$ sur le schéma-bloc. L'entrée nulle $X(p) = 0$ entraîne $\varepsilon(p) = -Y(p)$; on peut donc mettre une boîte de gain -1 à la place du soustracteur, avec comme entrée $Y(p)$. Le schéma-bloc devient alors :



Or suivant les différents chemins, on constate comme précédemment qu'il ne reste que deux boucles concentriques à réduire

$$H_u(p) = \left(\frac{Y(p)}{U(p)} \right)_{X(p)=0} = \frac{H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_1 H_2 + H_2 H_3 H_5 H_6}$$

3. Si on s'intéresse à l'influence simultanée de $X(p)$ et de $U(p)$ sur $Y(p)$, la linéarité des systèmes étudiés, qui reste une des hypothèses fortes du chapitre concerné, permet de dire que la sortie $Y(p)$ se met sous la forme

$$Y(p) = H_x(p)X(p) + H_u(p)U(p)$$

Remarque : Il est évidemment toujours possible de résoudre algébriquement, en « lisant » le schéma-bloc. On obtient une équation linéaire en $Y(p)$, $X(p)$ et $U(p)$ dont on extrait $Y(p)$

$$Y(p) = H_2 (H_1 [X(p) - Y(p)] + H_3 [H_4 U(p) + H_6(p)Y(p)])$$

On factorise les entrées et la sortie...

$$(1 + H_1 H_2 + H_2 H_3 H_5 H_6) Y(p) = (H_1 H_2) X + (H_2 H_3 H_4 H_5) U(p)$$

... pour retrouver le résultat précédent

$$Y(p) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 + H_2 H_3 H_5 H_6} X(p) + \frac{H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_1 H_2 + H_2 H_3 H_5 H_6} U(p)$$

5.9 Transformée de Laplace

1. Les différentes transformées de Laplace sont :

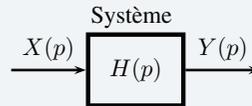
$$\begin{aligned} x(t) &\mapsto X(p) \\ y(t) &\mapsto Y(p) \\ y'(t) &\mapsto pY(p) - y_0 \\ y''(t) &\mapsto p(pY(p) - y_0) - y_0' \end{aligned}$$

On obtient alors, après arrangement

$$Y(p) = \underbrace{\frac{21}{p^2 + 10p + 21} X(p)}_{Y_1(p)} + \underbrace{\frac{py_0 + y_0' + 10y_0}{p^2 + 10p + 21}}_{Y_2(p)}$$

$Y(p)$ est la somme de deux termes $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$:

- le terme $\frac{21}{p^2 + 10p + 21}$ représente la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ du système d'entrée $X(p)$ et de sortie $Y(p)$;



- le terme $\frac{21}{p^2 + 10p + 21} X(p)$ représente la réponse $Y_1(p)$ du système à la sollicitation $X(p)$ en l'absence de conditions initiales ;

$$Y_1(p) = H(p)X(p)$$

- le terme $\frac{py_0 + y_0' + 10y_0}{p^2 + 10p + 21}$ représente la réponse libre $Y_2(p)$ du système suite aux conditions initiales, en l'absence d'entrée.

Évaluer les performances d'un système se fait par l'analyse de ses réponses à des entrées connues et maîtrisées. Ces réponses ne peuvent être exploitées que si les conditions initiales sont nulles et n'ont pas d'influence sur le comportement du système étudié.

2. On s'intéresse aux réponses indicielles du système concerné, pour lesquelles $X(p) = \frac{1}{p}$:

- Cas des conditions initiales nulles.

Le dénominateur de la fonction de transfert admet deux racines réelles et la sortie s'écrit alors

$$Y(p) = \frac{21}{p(p+3)(p+7)}$$

On décompose cette réponse en éléments simples

$$\frac{21}{p(p+3)(p+7)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+3} + \frac{c}{p+7}$$

- on multiplie par p les deux membres de l'égalité précédente et on prend la valeur $p = 0$ pour évaluer la valeur du premier coefficient a ;

- puis on multiplie respectivement par $p + 3$ et $p + 4$ en prenant comme valeur $p = -3$ et $p = -4$ pour évaluer les valeurs des deux autres coefficients b et c .

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{7}{4} \frac{1}{(p+3)} + \frac{3}{4} \frac{1}{(p+7)}$$

Par transformée inverse de Laplace, on en déduit l'expression $y_{00}(t)$ de la réponse avec les deux conditions initiales nulles

$$y_{00}(t) = 1 - \frac{7}{4} e^{-3t} + \frac{3}{4} e^{-7t}$$

- Cas des conditions initiales non nulles.

On a alors à rechercher la transformée inverse de la fonction

$$Y(p) = \frac{2p^2 + 25p + 21}{p(p+3)(p+7)}$$

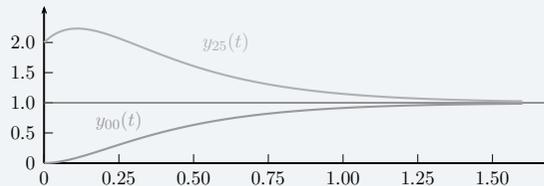
On la décompose en éléments simples de la même manière que précédemment

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{3}{p+3} - \frac{2}{p+7}$$

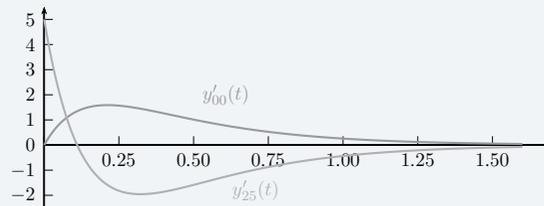
La réponse temporelle correspondante est alors

$$y_{25}(t) = 1 + 3e^{-3t} - 2e^{-7t}$$

On trace alors les courbes des réponses obtenues



On complète ces deux courbes par le tracé des dérivées premières, sur lesquelles on retrouve les conditions initiales concernées



3. La recherche d'une solution sous la forme $y(t) = S \sin(\omega t + \varphi)$ consiste à rechercher une solution particulière de l'équation différentielle, c'est à dire que l'on ne s'occupe pas du régime transitoire, mais seulement du régime permanent de la réponse forcée.

Le rapport $\frac{S}{E} e^{j\varphi}$ s'obtient en substituant $j\omega$ à la variable p dans la fonction de transfert.

$$\frac{S}{E} e^{j\varphi} = H(j\omega)$$

C'est un nombre complexe dont :

- le module exprime le gain du système ;
- l'argument exprime le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

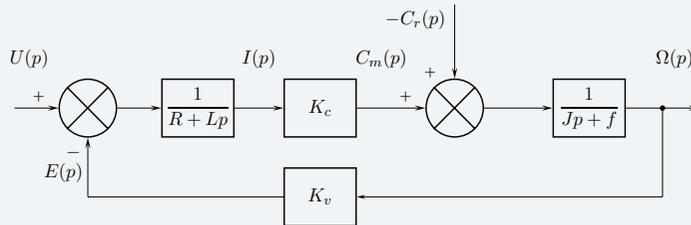
Leurs valeurs dépendent de celle de la pulsation ω de sollicitation.

5.10 Moteur à courant continu

1. On suppose les conditions initiales nulles et on applique la transformée de Laplace aux équations de fonctionnement

$$\begin{aligned} u(t) &= e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} &\mapsto & U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p) \\ e(t) &= K_v \omega(t) &\mapsto & E(p) = K_v \Omega(p) \\ c_m(t) &= K_c i(t) &\mapsto & C_m(p) = K_c I(p) \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} &= c_m(t) - c_r(t) - f\omega(t) &\mapsto & Jp\Omega(p) = C_m(p) - C_r(p) - f\Omega(p) \end{aligned}$$

2. Pour un moteur commandé en tension, on peut tracer le schéma-bloc suivant :



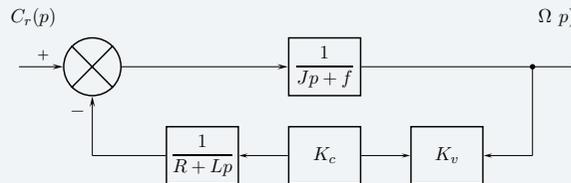
3. Si on suppose l'entrée de perturbation nulle, on obtient en utilisant les résultats de l'algèbre des schémas

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{K_c K_v + (Jp + f)(R + Lp)}$$

Soit, en regroupant les différentes puissances de p

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{K_c K_v + Rf + (LJ + Rf)p + LJp^2}$$

Si on suppose l'entrée de consigne nulle, on travaille alors sur le schéma suivant :



On réduit la boucle pour écrire

$$\frac{\Omega(p)}{C_r(p)} = \frac{R + Lp}{K_c K_v + Rf + (LJ + Rf)p + LJp^2}$$

Le système étant linéaire, on obtient finalement, par superposition

$$\begin{aligned} \Omega(p) &= \frac{K_c}{K_c K_v + Rf + (LJ + Rf)p + LJp^2} U(p) \\ &\quad - \frac{R + Lp}{K_c K_v + Rf + (LJ + Rf)p + LJp^2} C_r(p) \end{aligned}$$

4. Si on applique un échelon de tension en entrée en l'absence de perturbation, on a

$$U(p) = \frac{U_0}{p} \quad C_r(p) = 0$$

On admet que le moteur tend, en régime permanent, vers un taux de rotation fini noté ω_∞ . En utilisant le théorème de la valeur finale, on peut écrire

$$\omega_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega(p)$$

On a alors

$$\omega_{\infty} = \frac{K_c}{K_c K_v + Rf} U_0$$

5.11 Antiblocage de roue 2

1. La modélisation proposée pour l'écoulement se traduit par

$$p(t) = L \int_0^t z(u) du$$

On suppose les conditions initiales nulles. En appliquant la transformée de Laplace aux équations modélisant le fonctionnement de l'électrovanne, on obtient

$$P(p) = \frac{L}{p} Z(p)$$

$$Mp^2 Z(p) = BI(p) - KZ(p) - \mu p Z(p) - SP(p)$$

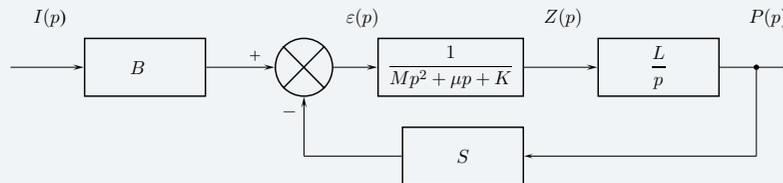
Soit, après arrangement

$$(Mp^2 + \mu p + K)Z(p) = BI(p) - SP(p)$$

ou encore

$$Z(p) = \frac{1}{Mp^2 + \mu p + K} (BI(p) - SP(p))$$

On obtient alors le schéma-bloc suivant :



2. À partir des résultats de l'algèbre des schémas, on peut écrire

$$\frac{P(p)}{I(p)} = \frac{BL}{LS + p(K + \mu p + Mp^2)}$$

3. On n'a pas de système asservi car il n'y a pas de signal de commande élaboré par un correcteur. Ce schéma représente simplement l'électrovanne dont le fonctionnement fait apparaître un effet de *feed-back*.

4. Si l'asservissement est correctement conçu, alors la fonction de transfert de l'adaptateur est égale à celle du capteur.

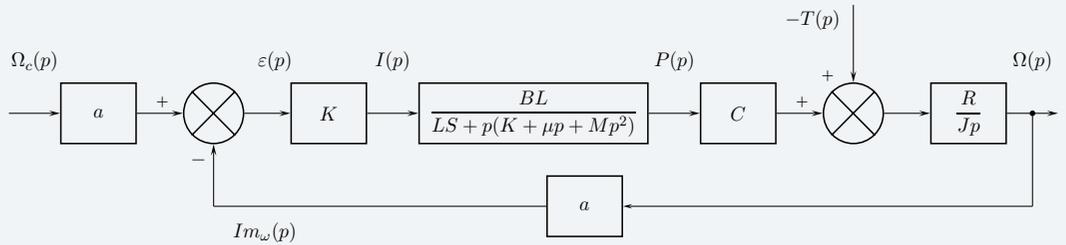
Par ailleurs, dans le domaine symbolique, le modèle de connaissance fourni s'écrit, si les conditions de Heaviside sont vérifiées

$$R(-T(p) + CP(p)) = Jp\Omega(p)$$

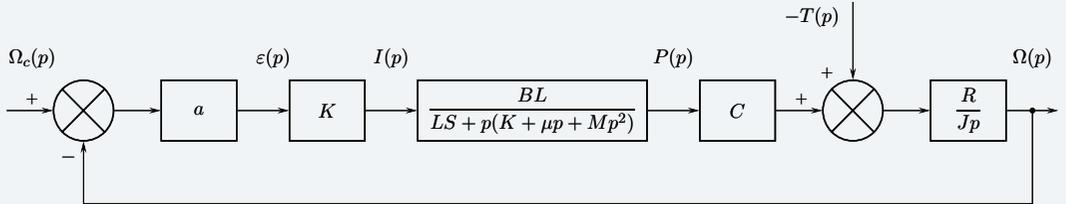
On en déduit

$$\Omega(p) = \frac{R}{Jp} (CP(p) - T(p))$$

On peut alors tracer le schéma-bloc suivant :



Ou encore, en proposant un schéma à retour unitaire



5. Pour la fonction de transfert en poursuite, on suppose l'entrée de perturbation nulle. On obtient alors

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{aKBLCR}{aKBLCR + Jp(LS + p(K + \mu p + Mp^2))}$$

Pour la fonction de transfert en régulation, on suppose l'entrée de consigne nulle. On obtient dans ce cas

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{T(p)} = \frac{R(LS + p(K + \mu p + Mp^2))}{aKBLCR + Jp(LS + p(K + \mu p + Mp^2))}$$

6. En mettant les fonctions de transfert précédentes sous forme canonique, on a

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{Jp}{aKBLCR}(LS + p(K + \mu p + Mp^2))}$$

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{T(p)} = \frac{S}{aKBC} \frac{1 + \dots}{1 + \dots}$$

On trouve :

- pour la fonction de transfert en poursuite, un gain statique de 1 ;

$$K_H = 1$$

- pour la fonction de transfert en régulation, l'expression du gain statique K_G est

$$K_G = \frac{S}{aKBC}$$

7. On cherche $\omega_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$.

Comme le système est stable, la vitesse de la roue tend vers une valeur finie, on peut donc utiliser le théorème de la valeur finale

$$\omega_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega(p)$$

Comme le système est linéaire, on a

$$\Omega(p) = H(p)\Omega_c(p) - G(p)T(p)$$

Comme les entrées de consigne et de perturbation sont constantes, on a

$$\Omega_c(p) = \frac{\Omega_0}{p} \quad T(p) = \frac{T_0}{p}$$

On obtient alors

$$\omega_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} (H(p)\Omega_0 - G(p)T_0)$$

Finalement, on a

$$\omega_\infty = \Omega_0 - \frac{S}{aKBC}T_0$$

On constate qu'il y a une erreur en permanence lorsqu'il y a une perturbation. Pour supprimer cette erreur, il faut implanter un autre type de correcteur.

5.12 Planeuse

1. B doit avoir la même dimension que les moments d'inertie J_1 et J_2 , donc s'exprime en kg.m^2 .
2. On travaille par superposition, en commençant par poser $U_2(p) = 0$

$$\Omega_1(p) = \frac{K_1}{K_1^2 + R_1 J_1 p} U_1(p) + Bp \left(\frac{R_1}{K_1^2 + R_1 J_1 p} \right) \Omega_2(p)$$

De même, en posant $U_1(p) = 0$

$$\Omega_2(p) = \frac{K_2}{K_2^2 + R_2 J_2 p} U_2(p) + Bp \left(\frac{R_2}{K_2^2 + R_2 J_2 p} \right) \Omega_1(p)$$

Finalement, par combinaison de ces deux dernières équations

$$\Omega_1(p) = \frac{K_1(K_2^2 + R_2 J_2 p)U_1(p) + K_2 R_1 B p U_2(p)}{(K_1^2 + R_1 J_1 p)(K_2^2 + R_2 J_2 p) - R_1 R_2 B^2 p}$$

On en déduit

$$H_{11}(p) = \frac{K_1(K_2^2 + R_2 J_2 p)}{(K_1^2 + R_1 J_1 p)(K_2^2 + R_2 J_2 p) - R_1 R_2 B^2 p}$$

$$H_{12}(p) = \frac{K_2 R_1 B p}{(K_1^2 + R_1 J_1 p)(K_2^2 + R_2 J_2 p) - R_1 R_2 B^2 p}$$

3. On propose comme schéma-bloc le schéma de la figure 5.16.
4. À partir du schéma de la figure 5.16, on peut écrire

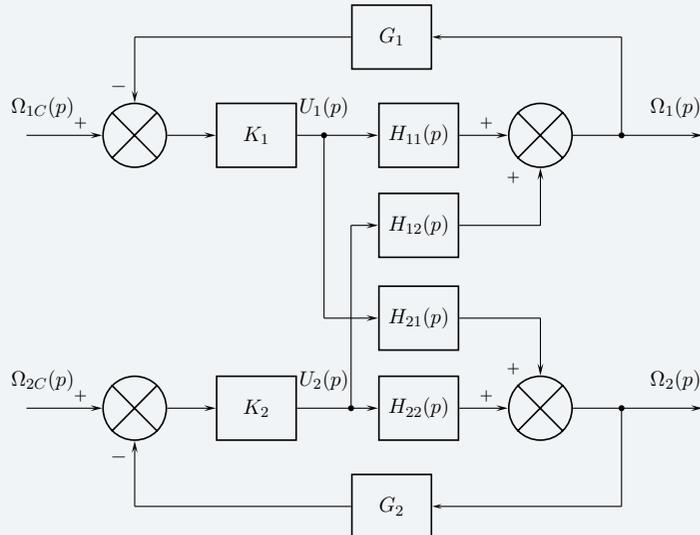
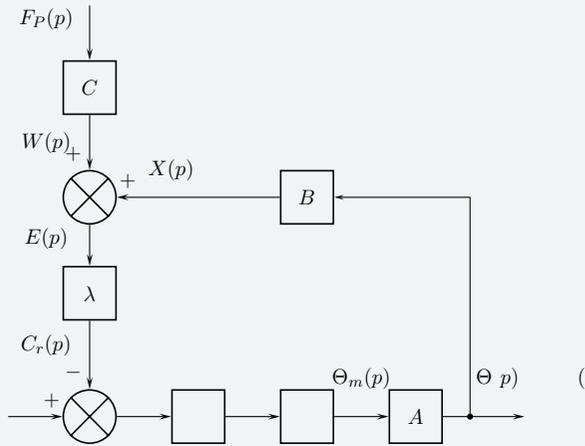


Figure 5.16 – La structure de l'asservissement des deux moteurs

$$\Omega_1(p) = \frac{K_1 H_{11}(p)}{1 + K_1 G_1 H_{11}(p)} \Omega_{1C}(p) + \frac{H_{12}(p)}{1 + K_1 G_1 H_{11}(p)} U_2(p)$$

5.13 Restituteur d'effort

1. Le pas λ d'une hélice est exprimé en $\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$.



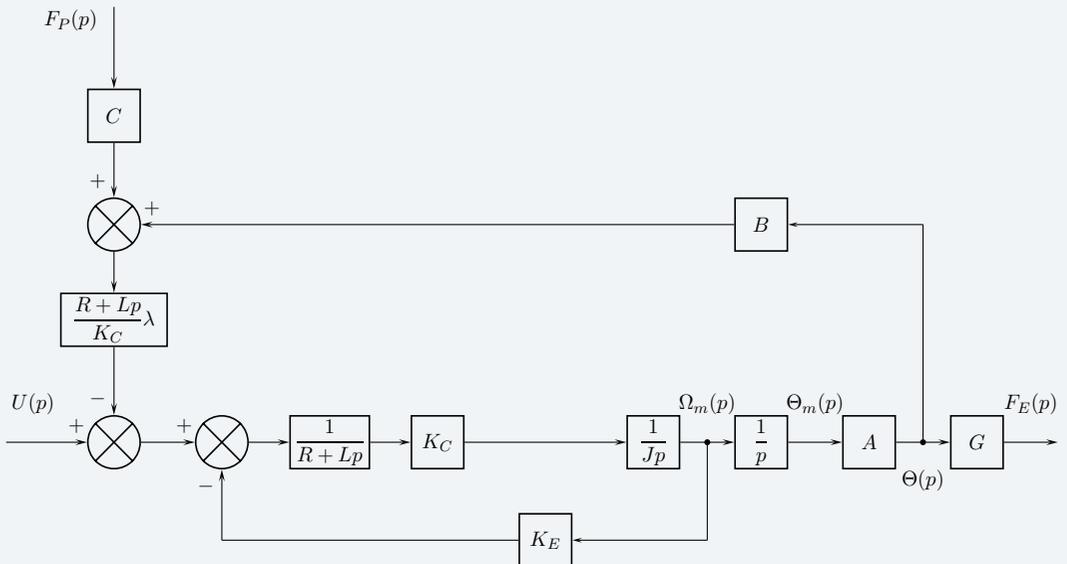
À la lecture du schéma-bloc, on a

$$\lambda = \frac{C_r(p)}{E(p)}$$

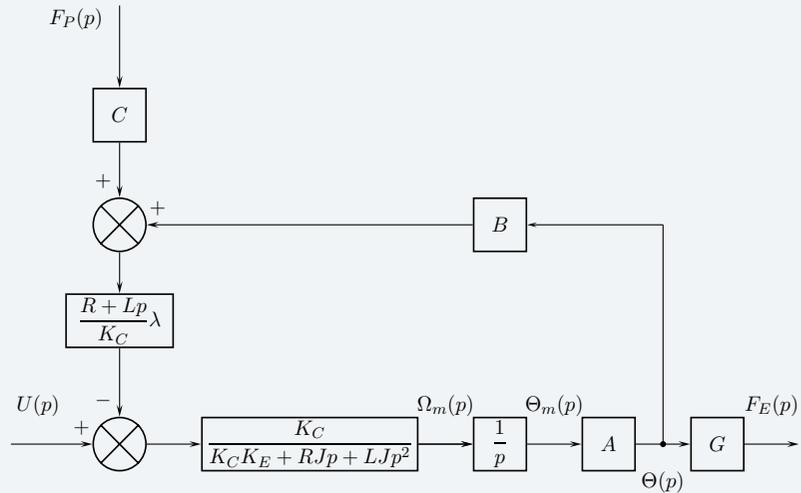
$C_r(p)$ est l'image dans le domaine symbolique d'un couple résistant $c_r(t)$. Un couple est exprimé en N.m, donc l'entrée e est homogène à une force, exprimée en Newton.

Comme $E(p)$ est la sortie d'un sommateur, $W(p)$ et $X(p)$ sont de même dimension que $E(p)$. On en déduit alors que C est sans dimension et que B est en $\text{N}\cdot\text{rad}^{-1}$.

2. Sur le schéma on peut lire $\Delta F(p) = k(F_P(p) - F_E(p))$. Pour déterminer $F_E(p)$, on peut réorganiser le schéma pour avoir des boucles imbriquées.



On peut alors réduire la boucle interne pour tracer le schéma suivant :



À partir de ce schéma, on peut trouver :

- $R(p) = \frac{F_E(p)}{U(p)}$ en supposant $F_P(p)$ nulle ;
- $G(p) = \frac{F_E(p)}{F_P(p)}$ en supposant $U(p)$ nulle.

On pose $F_P(p) = 0$; on écrit alors

$$R(p) = \frac{F_E(p)}{U(p)} = G \frac{A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p}}{1 + A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p} \times B \times \frac{R + L p}{K_C} \lambda}$$

Soit, après réduction

$$R(p) = \frac{G A K_C}{p(K_C K_E + R J p + L J p^2) + A B \lambda (R + L p)}$$

On pose $U(p) = 0$; on trouve alors

$$G(p) = \frac{F_E(p)}{F_P(p)} = -G C \frac{A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p} \times \frac{R + L p}{K_C} \lambda}{1 + A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p} \times B \times \frac{R + L p}{K_C} \lambda}$$

Soit, après réduction

$$G(p) = \frac{-G C A \lambda (R + L p)}{p(K_C K_E + R J p + L J p^2) + A B \lambda (R + L p)}$$

Finalement, on obtient

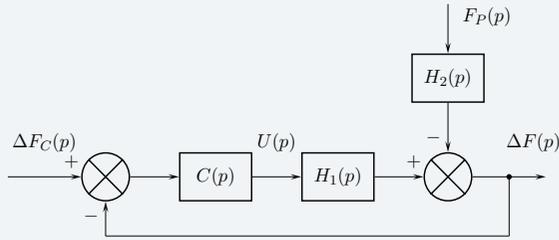
$$F_E(p) = \frac{G A (K_C U(p) - C \lambda (R + L p) F_P(p))}{L J p^3 + R J p^2 + (K_C K_E + A B \lambda) p + A B R \lambda}$$

En revenant au calcul initial, on peut alors identifier $H_1(p)$ et $H_2(p)$:

$$H_1(p) = -\frac{k G A K_C}{L J p^3 + R J p^2 + (K_C K_E + A B \lambda) p + A B R \lambda}$$

$$H_2(p) = 1 + \frac{k G A C \lambda (R + L p)}{L J p^3 + R J p^2 + (K_C K_E + A B \lambda) p + A B R \lambda}$$

3. La grandeur asservie est l'écart d'effort $\Delta f = f_p - f_e$. On peut représenter cet asservissement par le schéma suivant où $C(p)$ représente le correcteur



5.14 Modèle de comportement

1. La pente à l'origine semble non nulle et il n'y a ni dépassement, ni oscillation, on peut raisonnablement envisager un modèle d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2. En régime permanent, la réponse d'un système d'ordre 1 à un échelon d'amplitude E_0 tend vers KE_0 . Ici, comme l'échelon d'entrée a une amplitude de 2 et comme la réponse tend vers 20, on a donc un gain statique de $K = 10$.

Le temps de réponse à 5 % d'un système du premier ordre est égal à 3τ .

On relève sur la courbe : $tr_{5\%} = 1,8s$, on en déduit : $\tau = 0,6s$.

Pour contrôler le modèle envisagé, on vérifie qu'à l'instant $t = \tau$ le système a atteint 63% de sa valeur finale. Ici, on peut vérifier que $s(\tau) \approx 12,6$.

En conclusion, on peut convenir que le modèle proposé convient pour le système testé.

$$H(p) = \frac{10}{1 + 0,6p}$$

Remarque : Pour valider le modèle de comportement établi, il faudrait réaliser un essai avec un autre type de signal en entrée, par exemple un signal sinusoïdal.

5.15 Essai moteur

1. D'après la pente à l'origine et vu l'absence d'oscillation, on peut opter pour un modèle d'ordre 1, soit

$$F_1(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2. En régime permanent, le taux de rotation du moteur tend vers $84 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Le moteur est alimenté avec un échelon de 12 Volts, on a donc comme gain statique

$$K = 7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$$

Le temps de réponse à 5% est d'environ 100 millisecondes. Pour un système d'ordre 1, le temps de réponse est égal à trois fois la constante de temps. On obtient alors pour le moteur testé

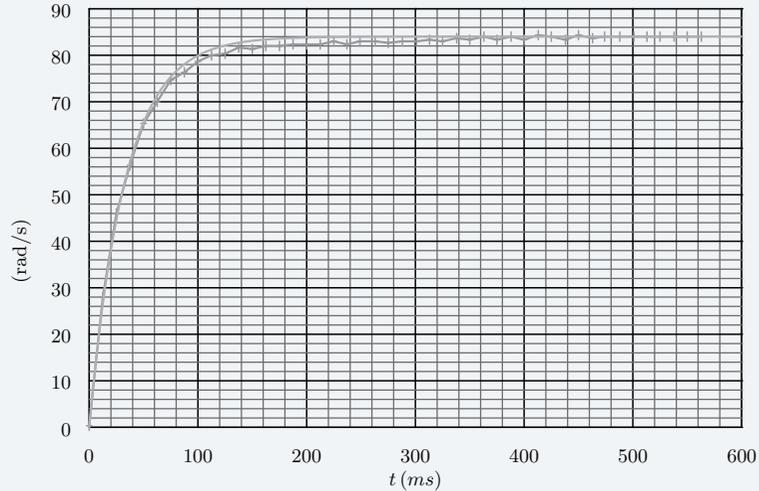
$$\tau \approx 33 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Cela permet de proposer le modèle de représentation suivant

$$M(p) \approx \frac{7}{1 + 33 \cdot 10^{-3} p}$$

Pour un système d'ordre 1, à l'instant $t = \tau$, la sortie est égale à 63 % de la valeur finale. Cette propriété est approximativement vérifiée sur la courbe de réponse du moteur.

Pour valider le modèle obtenu, on superpose le modèle de comportement à la courbe expérimentale.



On peut considérer que le modèle déterminé est satisfaisant.

3. Comme il n'y a pas de dépassement, on choisit dans ce cas un modèle d'ordre 2 aperiodique ; le coefficient d'amortissement est supérieur à 1.

4. La fonction de transfert d'un ordre 2 aperiodique s'exprime comme le produit de deux modèles d'ordre 1

$$F_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Si l'entrée est un échelon unitaire, on a comme expression pour $\Omega(p)$ dans le domaine symbolique

$$\Omega(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \frac{1}{p}$$

Après décomposition en éléments simples et par transformation inverse, on obtient

$$\omega(t) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$$

5. Si la contribution de $\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ est négligeable devant celle de $\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$, c'est-à-dire si τ_1 est petit devant τ_2 , alors la réponse indicielle peut être approchée par

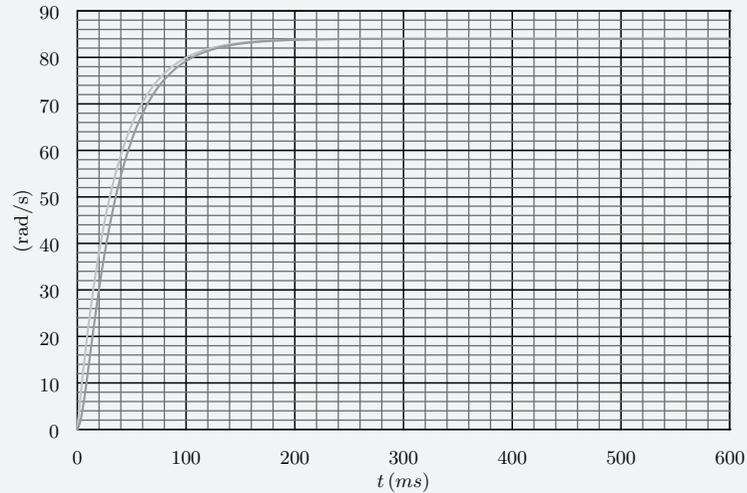
$$\omega(t) \approx K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

Cette dernière expression est la réponse indicielle d'un système d'ordre 1, de gain K et de constante de temps τ_2 .

En conclusion, dans une étude temporelle, un système d'ordre 2 peut être approximé par un système d'ordre 1 s'il est aperiodique et si l'une de ses constantes de temps est négligeable devant l'autre.

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \approx \frac{K}{(1 + \tau_2 p)} \text{ si } \tau_1 \ll \tau_2$$

Remarque : La courbe de réponse fournie a été tracée à partir d'une acquisition réalisée à environ 80 Hz, donc tout évènement survenant dans les 10 premières millisecondes ne peut pas être relevé. La deuxième constante de temps est alors plus petite que 10 ms. Si on prend comme constante de temps négligée $\tau_1 = 5$ ms, on peut tracer les deux courbes suivantes



L'approximation semble raisonnable.

5.16 Essai indiciel

1. Compte tenu du dépassement constaté, il est nécessaire d'envisager un modèle d'ordre 2 au minimum.
2. Si on retient un modèle d'ordre 2 simple, alors on pose

$$F(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

3. Le dépassement relatif a pour expression

$$D_{rel} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On relève sur la courbe proposée un dépassement absolu de 2,5. Comme la valeur finale vaut 10, on a un dépassement relatif de 0,25. On trouve alors

$$\xi \approx 0,4$$

L'instant du premier dépassement est égale à la demi pseudopériode, soit

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

Comme on a un temps de pic d'environ 3,5 secondes, on trouve

$$\omega_0 \approx 0,98 \text{ rad.s}^{-1}$$

L'amplitude de l'échelon est de 10, la valeur finale est de 10 donc le gain statique K vaut 1 car en régime permanent la réponse tend vers KE_0 .

$$K = 1$$

Finalement, on propose comme modèle de représentation pour le système bouclé

$$F(p) \approx \frac{1}{1 + 0,81p + 1,04p^2}$$

4. Si on note

$$H(p) = K \frac{1 + b_1 p + \dots + b_k p^k}{p^\alpha (1 + a_1 p + \dots + a_n p^n)}$$

alors on obtient pour $F(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée

$$F(p) = \frac{KAK_C(1 + b_1p + \dots + b_kp^k)}{KAK_C(1 + b_1p + \dots + b_kp^k) + p^\alpha(1 + a_1p + \dots + a_np^n)}$$

qu'on peut encore écrire

$$F(p) = \frac{KAK_C(1 + b_1p + \dots + b_kp^k)}{KAK_C + p^\alpha + KAK_C(b_1p + \dots + b_kp^k) + p^\alpha(a_1p + \dots + a_np^n)}$$

Pour avoir un gain statique de 1, il faut $\alpha \neq 0$.

Pour avoir une fonction de transfert d'ordre 2, on a : $\alpha + 1 = 2$ et $k \leq 2$.

On peut proposer comme forme générale

$$H(p) = K \left(\frac{1 + b_1p + b_2p^2}{p(1 + a_1p)} \right)$$

5. Si on admet que $H(p)$ n'a pas de zéro, alors

$$H(p) = K \frac{1}{p(1 + a_1p)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors

$$F(p) = \frac{KAK_C}{KAK_C + p + a_1p^2}$$

ou encore

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{KAK_C}p + \frac{a_1}{KAK_C}p^2}$$

Par identification avec la forme générique d'un ordre 2, on trouve

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{KAK_C} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{a_1}{KAK_C} \quad (2)$$

Ce qui permet d'écrire

$$K = \frac{\omega_0}{2\xi AK_C} \quad a_1 = \frac{1}{2\xi\omega_0}$$

À partir des valeurs trouvées, on a

$$K \approx 1,225 \quad a_1 \approx 1,275$$

En conclusion, on propose

$$H(p) = \frac{1,225}{p(1 + 1,275p)}$$

6. Le système d'ordre 2 le plus rapide est obtenu lorsque le coefficient d'amortissement vaut 0,69. D'après les relations (1) et (2), on a

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{a_1 KAK_C}} \text{ soit } K_C = \frac{1}{4a_1 K A \xi^2}$$

Pour obtenir le temps de réponse le plus faible possible, il faut donc

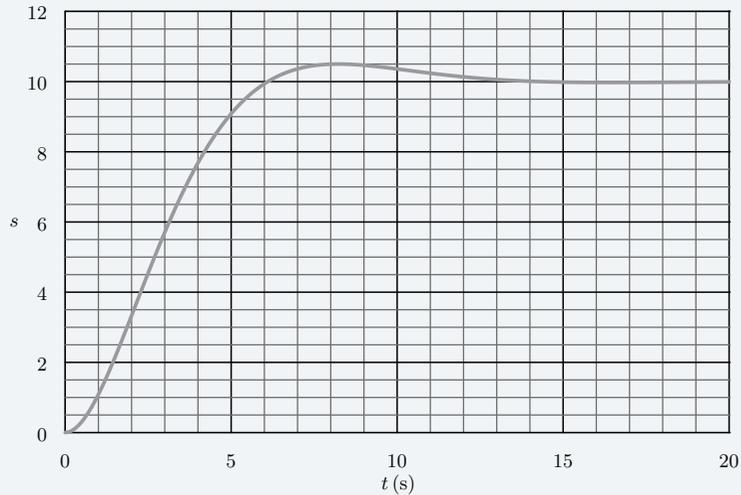
$$K_C \approx 1,68$$

Par ailleurs, lorsque $\xi = 0,69$ on a $tr_{5\%}\omega_0 \approx 3$. Comme $\omega_0 = \sqrt{\frac{KAK_C}{a_1}}$, on en déduit

$$tr_{5\%} \approx 3\sqrt{\frac{a_1}{KAK_C}} \text{ soit } tr_{5\%} \approx 5,3$$

On peut vérifier ce résultat sur la courbe ci-dessous.

On diminue le gain de boucle pour avoir un système moins oscillant.



7. La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit

$$BO(p) = \frac{KAK_C}{p(1+a_1p)}$$

Si on réalise un essai indiciel, alors

$$R(p) = \frac{KAK_C}{p(1+a_1p)} \frac{1}{p}$$

ou encore, en décomposant en éléments simples

$$R(p) = \frac{B}{p} + \frac{C}{p^2} + \frac{D}{1+a_1p}$$

Par transformation inverse de Laplace, on obtient

$$r(t) = B + Ct + De^{-\frac{t}{a_1}}$$

Le signal r de sortie du capteur n'est donc pas borné. L'essai en boucle ouverte peut être délicat à mettre en œuvre.

5.17 Essais harmoniques

1. On détermine la pulsation, le gain en décibel et la phase en degré pour chaque essai, en utilisant comme relations :

- Pulsation : $\omega = 2\pi f$
- Gain : $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{S_0}{E_0} \right)$

• Phase : $\varphi(\omega) = -\omega T$ avec T le déphasage temporel.

Pulsation rad.s ⁻¹	Gain dB	Phase degré	Pulsation rad.s ⁻¹	Gain dB	Phase degré
1,25	9,5	-1,1	69,1	4,9	-56,1
5	9,4	-5,2	94,3	2,4	-63
9,4	9,4	-10,9	282,7	-6,3	-77,3
37,7	7,6	-41,3	502,7	-9,9	-85,9
50,3	6,4	-45,8	1005,3	-15,9	-85,9

2. À partir des valeurs calculées, on trace les diagrammes de Bode de la figure 5.17.

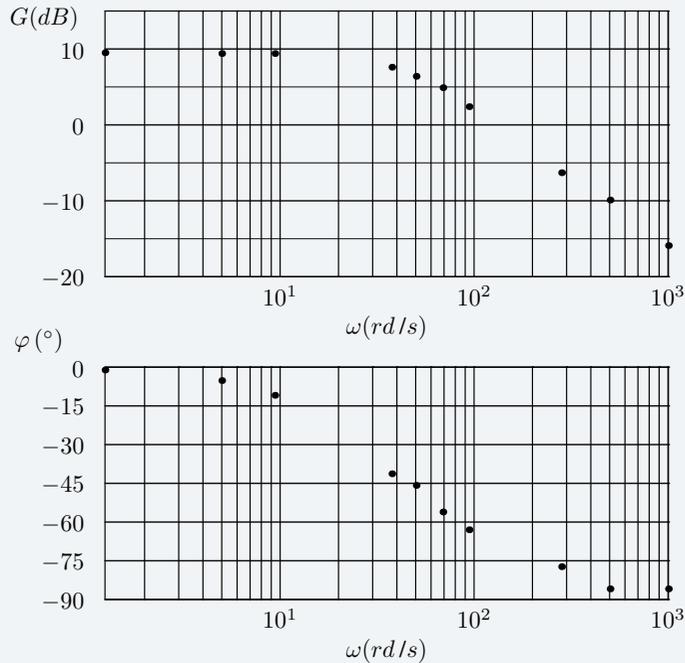


Figure 5.17 – Report des points mesurés

3. La phase variant de 0° à -90° , on peut envisager un modèle d'ordre 1. Par ailleurs, la courbe de gain ayant une pente nulle pour les basses pulsations et une pente qu'on peut poser à -20 dB/dec pour les pulsations élevées comme montré sur la figure 5.18, cela conforte le choix effectué.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Détermination des caractéristiques :

• Concernant le gain statique, on sait que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

On relève une valeur de 9,5 dB pour les basses pulsations. On a donc

$$K = 10^{\frac{9,5}{20}}, \text{ soit } K \approx 3$$

• Pour la pulsation de coupure à 3 dB, la phase vaut -45° . On trouve sur la courbe de phase

$$\omega_{3dB} \approx 50 \text{ rad.s}^{-1}$$

On vérifie sur la courbe de gain que : $G_{dB}(\omega_{3dB}) = 20 \log K - 3$. Comme $\omega_{3dB} = \frac{1}{T}$ alors on trouve

$$T \approx 0,02 \text{ s}$$

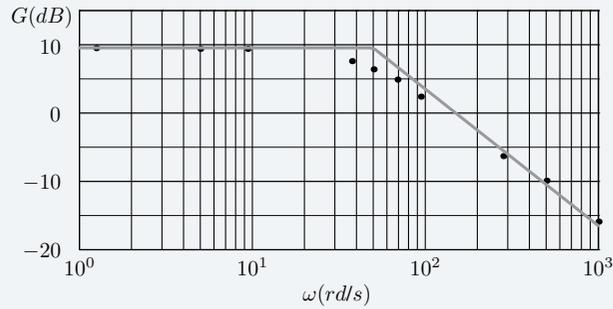


Figure 5.18 – Essai de tracé asymptotique en gain

Finalement, on propose

$$H(p) \approx \frac{3}{1 + 0,02p}$$

On cherche à valider le modèle en superposant le tracé réel et les relevés expérimentaux sur la figure 5.19.

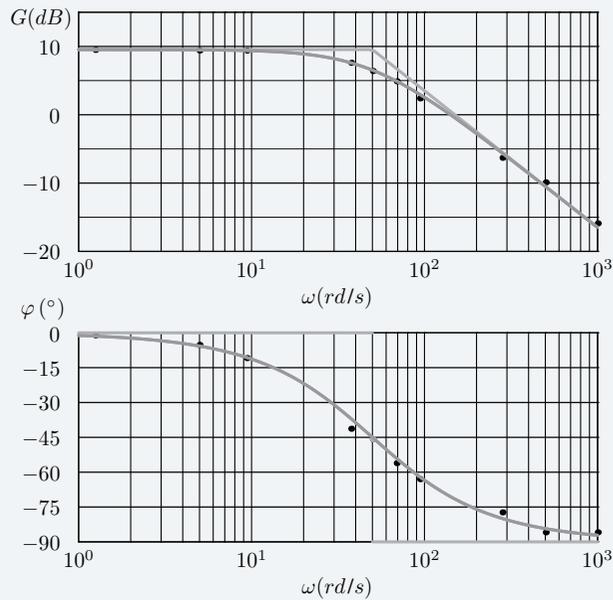


Figure 5.19 – Superposition du modèle et des points expérimentaux

Le modèle établi est valide sur la bande de pulsation $]0,1 ; 1000]$.

Comme on n'a aucune information pour des pulsations supérieures à 1000 rad.s^{-1} , on ne peut exclure, par exemple, l'existence d'une constante de temps très petite.

5.18 Transmission

1. La sollicitation est un échelon, la réponse ne présente pas de dépassement et la pente à l'origine n'est pas nulle. On propose en conséquence un modèle d'ordre 1

$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

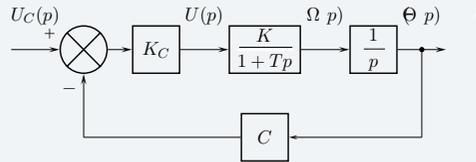
Sur la courbe de réponse fournie, on lit un temps de réponse de 1,5 s. Le temps de réponse d'un système d'ordre 1 est égal à $3T$, donc on trouve $T = 0,5$ s. En régime permanent, on atteint la valeur de 180 rad.s^{-1} . Comme l'échelon d'entrée a une amplitude de 12 Volts, on trouve $K = 15$. Finalement, on propose

$$H(p) = \frac{15}{1 + 0,5p}$$

2. On a $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$, donc dans le domaine symbolique, on obtient : $\Omega(p) = p\Theta(p)$ si on suppose les conditions initiales nulles et on propose

$$I(p) = \frac{1}{p}$$

3. On raisonne sur le schéma suivant :



À partir des résultats de l'algèbre des schémas, on écrit

$$\frac{\Theta(p)}{U_C(p)} = \frac{K K_C}{C K K_C + p(1 + T p)}$$

ou encore, sous forme canonique

$$\frac{\Theta(p)}{U_C(p)} = \frac{1}{C \left(1 + \frac{p}{C K K_C} + \frac{T}{C K K_C} p^2 \right)}$$

Le gain statique, noté K_{BF} , s'écrit : $K_{BF} = \frac{1}{C}$.

Application numérique :

$$K_{BF} = 0,5 \text{ V.rad}^{-1}$$

4. Un système d'ordre 2 a pour valeur finale $K E_0$ si E_0 est l'amplitude de l'échelon d'entrée et K le gain statique. Ici, $K = 0,5$ et $E_0 = 2$ donc la valeur finale doit être égale à 1 et on relève bien une valeur de 1 radian en régime permanent pour l'angle θ .

5. Le cahier des charges impose une réponse indicielle sans dépassement. Le coefficient d'amortissement doit être supérieur ou égal à 1 pour avoir un ordre 2 apériodique.

La forme canonique de la fonction de transfert d'un ordre 2 étant la suivante

$$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

on a par identification

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C K K_C}{T}} \text{ et } \xi = \frac{1}{2\sqrt{C K K_C T}}$$

Vouloir $\xi \geq 1$ implique $\frac{1}{2\sqrt{C K K_C T}} \geq 1$. Finalement, on obtient

$$K_C \leq \frac{1}{4CKT}$$

Application numérique :

$$K_C = \frac{1}{60}$$

6. Avec la valeur limite de K_C , on a un modèle d'ordre 2 apériodique critique, avec $\xi = 1$. On lit sur l'abaque proposé

$$tr_{5\%}\omega_0 \approx 5$$

Comme $\omega_0 = \sqrt{\frac{CKK_C}{T}}$ avec $K_C = \frac{1}{4CKT}$, alors $tr_{5\%} \approx 10T$.

Application numérique :

$$tr_{5\%} \approx 5 \text{ s}$$

Le temps de réponse obtenu est beaucoup trop élevé, il faut envisager un autre type de correcteur qui permette d'améliorer la rapidité tout en gardant la contrainte du non dépassement.

5.19 Recherche ordre 2

1. Tout d'abord, on écrit $H(p)$ sous forme canonique

$$H(p) = \frac{1}{2(1 + 0,32p + 0,16p^2)}$$

On peut alors déterminer les caractéristiques de ce système d'ordre 2.

- gain statique : $K = 0,5$
- pulsation propre non amortie : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,16}}$ soit $\omega_0 = 2,5 \text{ rad.s}^{-1}$
- coefficient d'amortissement : $\xi = \frac{0,32}{2} \times 2,5$ soit $\xi = 0,4$.

Comme $K = 0,5$ et comme l'échelon est d'amplitude 2, alors la valeur finale de la réponse est 1. L'ensemble des courbes convient.

Comme on a un deuxième ordre pseudopériodique car $\xi \leq 1$, alors on élimine la courbe 1.

On peut déterminer le temps de pic ou instant du premier maximum :

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

On a donc ici $t_{pic} \approx 1,37 \text{ s}$. On élimine les courbes 4 et 5.

Enfin, le dépassement relatif est défini par

$$D_{rel} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

On calcule $D_{rel} \approx 0,25$. On enlève la courbe 2 et ne reste que la courbe 3. On vérifie qu'elle remplit bien les trois conditions.

5.20 Identification

1. Il faut d'abord trouver l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $B(p)$, ce qui se fait par lecture du schéma-bloc

$$B(p) = 20 \times \frac{1 + 4p}{4p} \times \frac{40}{1 + 4,2p + 0,8p^2}$$

Il faut savoir si le système d'ordre 2 qui apparaît dans $B(p)$ est apériodique ou pseudopériodique. On cherche donc la valeur du coefficient d'amortissement ξ de $H(p)$. On trouve $\xi \approx 2,3$. Comme l'ordre 2 est apériodique, on peut factoriser $H(p)$. On a ainsi

$$H(p) = \frac{40}{(1 + 4p)(1 + 0,2p)}$$

On peut remarquer que le correcteur compense la constante de temps la plus grande et on obtient finalement

$$B(p) = \frac{200}{p(1 + 0,2p)}$$

Recherche du diagramme :

- Comme $B(p)$ est composée d'un intégrateur et d'un système d'ordre 1, la phase varie de -90° à -180° . On peut exclure le diagramme 4 dont la phase descend en dessous de -180° .
- La pulsation de coupure de l'ordre 1 est : $\omega_{3dB} = 5 \text{ rad.s}^{-1}$. Comme $B(p)$ est composée également d'un intégrateur, alors la phase pour la pulsation 5 rad.s^{-1} vaut -135° . On élimine le diagramme 2.
- Les courbes de phase des diagrammes 1 et 3 sont identiques. Les courbes de gain de ces diagrammes ont même allure. On calcule la valeur du gain lorsque la pulsation vaut 1 rad.s^{-1} . On trouve $G_{dB}(1) = 20 \log(200) - 20 \log \sqrt{1 + 0,2^2}$, soit

$$G_{dB}(1) \approx 46 \text{ dB}$$

On retient donc en définitive le diagramme 3.

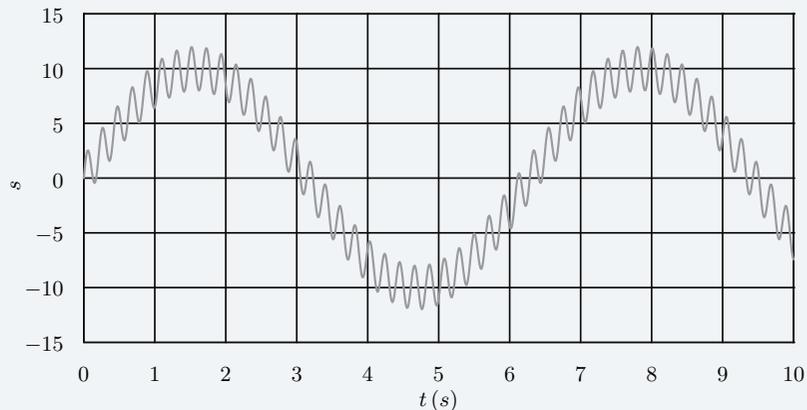
5.21 Réponse sinusoïdale

1. La pulsation du signal d'entrée est de $0,5 \text{ rad.s}^{-1}$. On relève sur le Bode

$$G_{dB}(0,5) \approx 0 \text{ dB}$$

Par définition, $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{S_0}{E_0} \right)$ où S_0 et E_0 représentent respectivement l'amplitude du signal de sortie et l'amplitude du signal d'entrée. On peut alors conclure que pour une pulsation de $0,5 \text{ rad.s}^{-1}$, il n'y a pas d'atténuation de l'amplitude du signal de sortie. En effet, $\frac{S_0}{E_0}$ est quasiment égal à 1. Ce résultat est logique car la pulsation du signal d'entrée est très inférieure à la pulsation de coupure à -3 dB , notée ω_{3dB} .

2. L'évolution du signal d'entrée, $e(t) = 10 \sin(t) + 2 \sin(30t)$, est représentée sur la courbe ci-dessous :



On décompose le signal d'entrée en deux signaux :

- $e_1(t) = 10 \sin(t)$ de pulsation $\omega_1 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$
- $e_2(t) = 2 \sin(30t)$ de pulsation $\omega_2 = 30 \text{ rad.s}^{-1}$.

Le système étant linéaire, la sortie est obtenue par superposition de l'effet des deux signaux d'entrée.

À partir du diagramme de Bode, on peut réaliser une approche qualitative :

- Pour le signal e_1 , la sortie s_1 aura une amplitude comparable à celle du signal d'entrée en tenant un raisonnement analogue à celui conduit à la question précédente

- Pour le signal e_2 , on relève : $G_{dB}(\omega_2) \approx -10$ dB. On a alors : $\frac{S_0}{E_0} \approx 10^{-\frac{10}{20}}$ donc $S_0 \approx 0,3E_0$. Atténuation prévisible puisque $\omega_2 \gg \omega_{3dB}$.

Qualitativement, on peut affirmer que le signal e_2 est filtré.

La détermination plus précise du signal de sortie se fait en utilisant les expressions analytiques du gain et de la phase.

À partir de l'expression de la fonction de transfert harmonique : $H(j\omega) = \frac{1}{1+0,1(i\omega)}$, on calcule :

- le gain : $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$, d'où ici

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log \left(\sqrt{1 + (0,1\omega)^2} \right)$$

- la phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$, soit ici

$$\varphi(\omega) = \arg(1) - \arg(1 + 0,1(i\omega))$$

ce qui donne : $\varphi(\omega) = -\arctan(0,1\omega)$ car le complexe $1 + 0,1(i\omega)$ a un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On calcule alors l'amplitude et le déphasage des deux signaux de sorties et on trouve :

- Pour $\omega = 1$, on a : $G_{dB}(1) = -20 \log(\sqrt{1 + 0,1^2})$ et $\varphi(1) = -\arctan(0,1)$

$$G_{dB}(1) \approx -0,04 \text{ dB et } \varphi(1) \approx -0,1 \text{ rad}$$

- Pour $\omega = 30$, on a : $G_{dB}(30) = -20 \log(\sqrt{1 + (0,1 \times 30)^2})$ et $\varphi(30) = -\arctan(3)$

$$G_{dB}(30) \approx -10 \text{ dB et } \varphi(30) \approx -1,10 \text{ rad}$$

D'où les expressions numériques des deux signaux de sortie

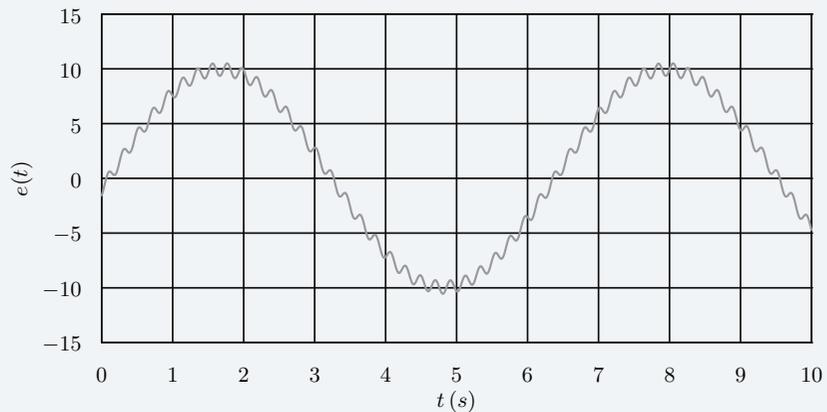
$$s_1(t) \approx 10 \times 10^{-\frac{0,04}{20}} \sin(t - 0,1)$$

$$s_2(t) \approx 2 \times 10^{-\frac{10}{20}} \sin(30t - 1,25)$$

En conclusion :

$$s(t) \approx 9,95 \sin(t - 0,1) + 0,6 \sin(30t - 1,25)$$

L'évolution de $s(t)$ est décrite ci-dessous :



Le signal e_2 est visiblement filtré comme prévu.

5.22 Bode ordre 1

1. Pour trouver la forme de la fonction de transfert harmonique, il suffit de remplacer p par $j\omega$ dans l'expression de $H(p)$. D'où :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

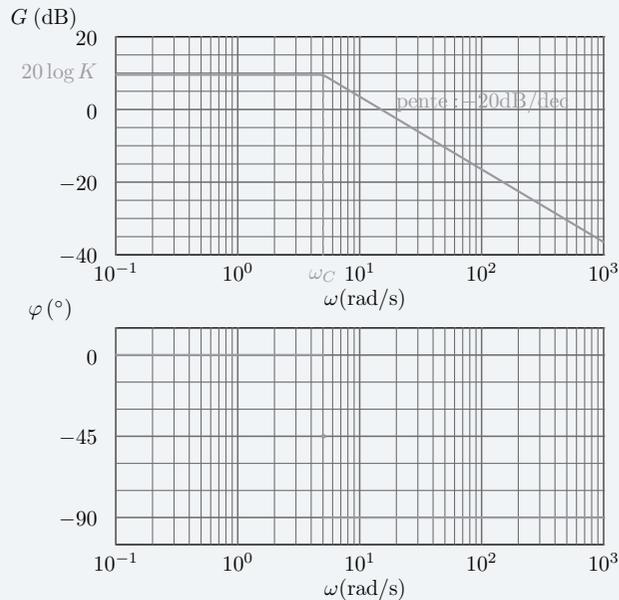
2. Si $\omega\tau \ll 1$, alors $H(j\omega) \approx K$, la partie imaginaire du dénominateur devient négligeable devant sa partie réelle.

Si $\omega\tau \gg 1$, alors $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega\tau}$, la partie réelle du dénominateur devient négligeable devant sa partie imaginaire.

3. Comme $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$, on obtient le tableau suivant :

ω	$\omega_c = \frac{1}{\tau}$	
$H_a(j\omega)$	K	$\frac{K}{j\omega\tau}$
$G_{dB_a}(\omega)$	$20 \log K$	$20 \log K - 20 \log(\omega\tau)$
$\varphi_a(\omega)$	0°	-90°

4. Pour $\omega \in]0; \omega_c]$, la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente nulle et d'ordonnée $20 \log K$. Pour $\omega \in [\omega_c; +\infty[$, la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente -20 dB par décade puisque le tracé s'effectue sur une échelle semilogarithmique.



Le diagramme asymptotique de phase peut être complété par la valeur de la phase calculée pour $\omega_c = \frac{1}{T}$, $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$.

5. Par définition :

• expression du gain $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)$$

- expression de la phase $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$, sachant que le complexe $1 + j\omega\tau$ a un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

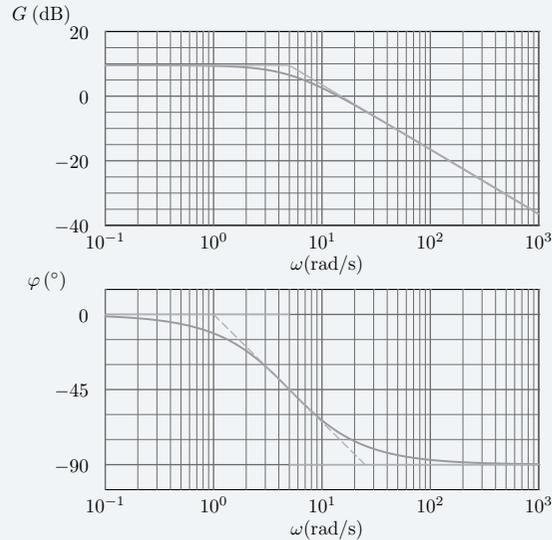
6. On complète le tableau de valeurs

ω	$\frac{1}{16\tau}$	$\frac{1}{4\tau}$	$\frac{1}{2\tau}$	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{2}{\tau}$	$\frac{4}{\tau}$	$\frac{16}{\tau}$
$ \varphi(\omega) - \varphi_a(\omega) $	3,5	14	26,5	45	26,5	14	3,5
$G_{dB}(\omega) - G_{dB_a}(\omega)$	≈ 0 dB		≈ -1 dB	≈ -3 dB	≈ -1 dB		≈ 0 dB

7. Le diagramme asymptotique de gain donne une représentation tout à fait valide du diagramme de gain puisque l'erreur maximale est de 3 dB pour la pulsation $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

À noter que la courbe de gain réelle reste constamment sous le tracé asymptotique.

Le diagramme asymptotique de phase est très éloigné du diagramme réel. On peut cependant le compléter afin d'obtenir l'allure du diagramme réel. La tangente au point $(\omega_c, -45^\circ)$ coupe l'asymptote 0° à $\omega \approx 1/5T$ et par symétrie, coupe l'asymptote à -90° à $\omega \approx 5/T$.



5.23 Bode ordre 2 aperiodique

1. On rappelle la forme générique d'une fonction de transfert d'un système d'ordre 2 :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

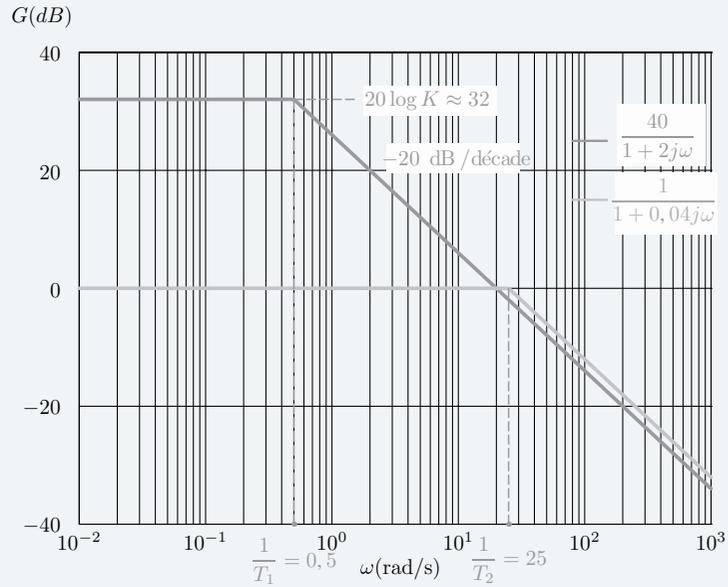
Par identification, on détermine le gain statique $K = 40$, la pulsation propre $\omega_0 \approx 3,5 \text{ rad.s}^{-1}$ et le coefficient d'amortissement $\xi \approx 3,6$.

2. Les pôles de la fonction de transfert sont les racines du dénominateur. On trouve : $p_1 = -0,5$ et $p_2 = -25$. La fonction de transfert $H(p)$ s'écrit alors

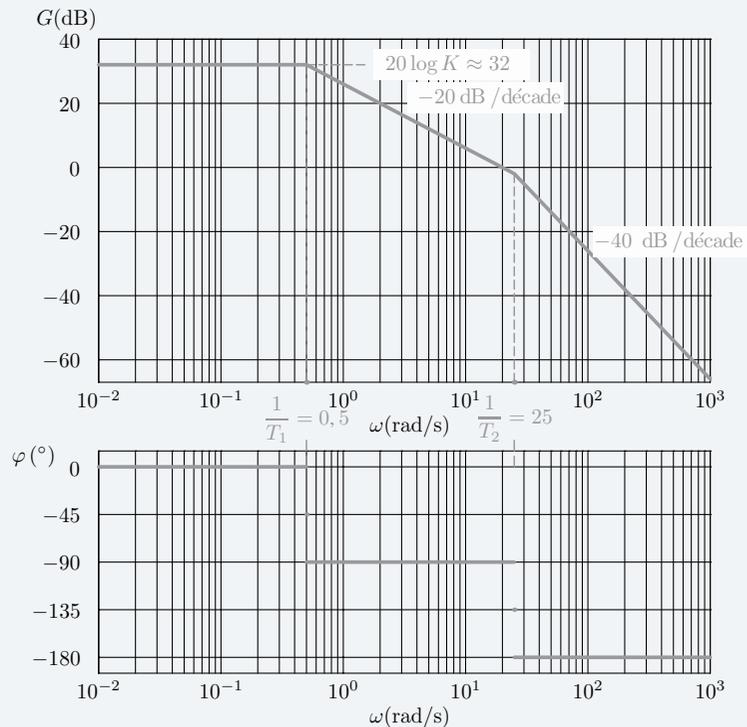
$$\frac{1}{1 + 2p} \times \frac{1}{1 + 0,04p} \text{ avec } \tau_1 = 2 \text{ s et } \tau_2 = 0,04 \text{ s}$$

3. Le système étudié est décrit par la mise en cascade de deux systèmes d'ordre 1, le tracé du diagramme asymptotique s'obtient en ajoutant les tracés correspondant aux deux systèmes d'ordre 1.

On trace tout d'abord les deux diagrammes de gain des systèmes d'ordre 1.



Puis on somme les deux graphiques :



4. On a un système aperiodique car $\xi > 1$, on écrit alors : $H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+T_2 p)}$ soit :

$$H(p) = \frac{K}{1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2}$$

En rapprochant cette écriture de la forme canonique $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$, on trouve :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

On a donc :

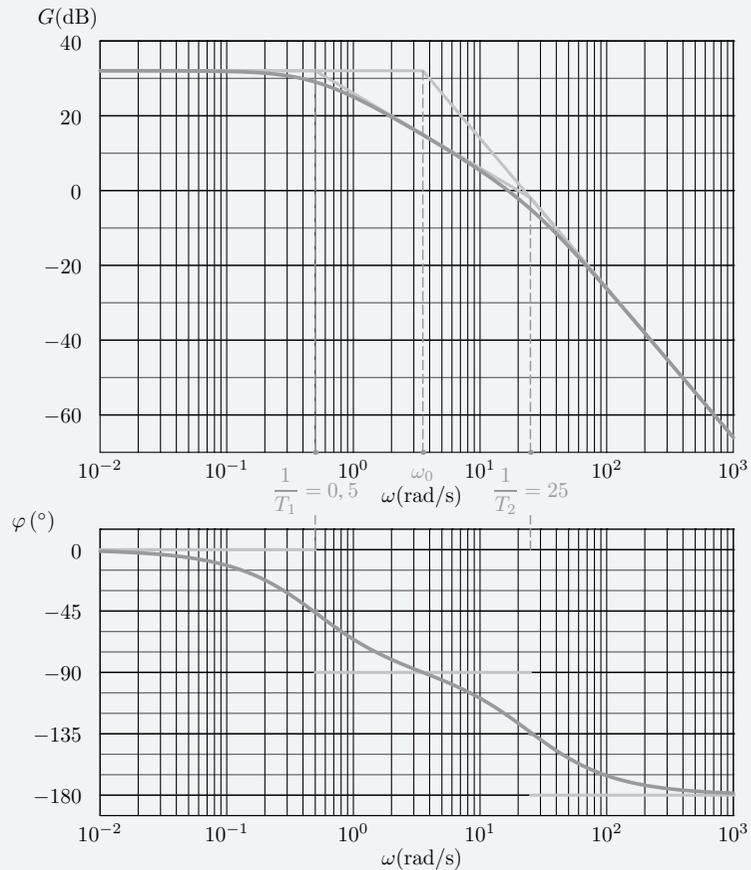
$$\log(\omega_0) = \frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{\tau_1}\right) + \log\left(\frac{1}{\tau_2}\right) \right)$$

Comme on a une échelle logarithmique sur l'axe des abscisses, ω_0 est bien le milieu du segment $\left[\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}\right]$.

5. Pour tous les systèmes d'ordre 2, on a à la cassure

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 20 \log(2\xi) \text{ et } \varphi(\omega_0) = -90^\circ$$

Ici, on a donc comme gain $G_{dB}(\omega_0) \approx 14,9 \text{ dB}$.



5.24 Bode ordre 2

1. Pour trouver la forme de la fonction de transfert harmonique, il suffit de remplacer p par $j\omega$ dans l'expression de $H(p)$.

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}}$$

2. À partir de l'expression précédente, on a immédiatement

$$H(j\omega_0) = \frac{K}{2i\xi}$$

Par définition de la phase et du gain

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \text{ et } G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$$

On a alors pour la phase $\varphi(\omega_0) = -\arg(2i\xi)$, d'où

$$\varphi(\omega_0) = -90^\circ$$

Et concernant le gain,

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 20 \log (2\xi)$$

Ces deux résultats sont valables pour tous les systèmes d'ordre 2.

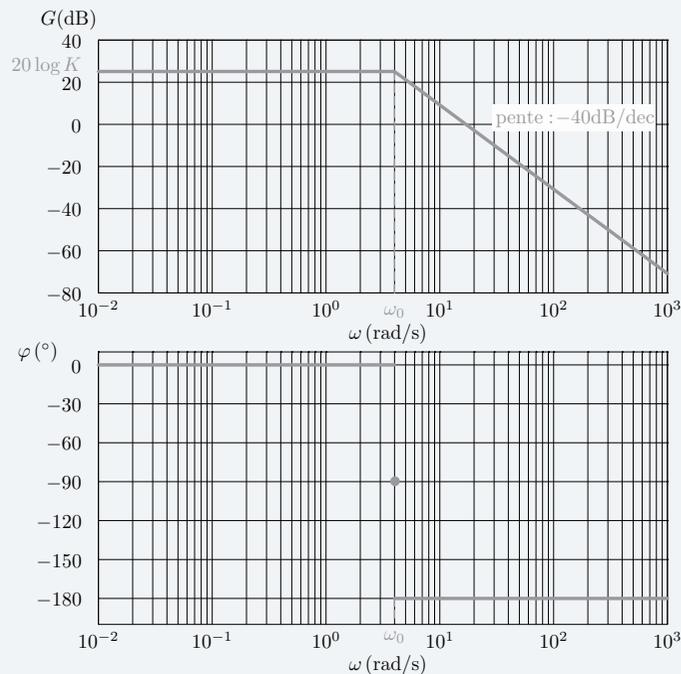
3. Lorsque $\omega \ll \omega_0$, rechercher $H_a(j\omega)$ revient à chercher la limite de $H(j\omega)$ lorsque ω tend vers 0. On a donc $H_a(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega)$. D'où : $H_a(j\omega) \approx K$.

Lorsque $\omega \gg \omega_0$, la partie réelle du dénominateur tend vers $-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et la partie imaginaire devient négligeable devant la partie réelle. On a donc : $H_a(j\omega) = \frac{-K\omega_0^2}{\omega^2}$

4. On complète alors le tableau demandé

ω	ω_0	
$H_a(j\omega)$	K	$\frac{-K\omega_0^2}{\omega^2}$
$G_{dB_a}(\omega)$	$20 \log K$	$20 \log K - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$
$\varphi_a(\omega)$	0°	-180°

5. Pour $\omega \in]0; \omega_0]$, la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente nulle et d'ordonnée $20 \log K$. Pour $\omega \in [\omega_0; +\infty[$, la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente -40 dB par décade puisque le tracé s'effectue sur une échelle semilogarithmique.



6. Par définition du gain en décibel, on a

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

et par définition de la phase

$$\varphi(\omega) = -\arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Pour $\omega \in]0; \omega_0]$, le complexe $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}$ a un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

Pour $\omega \in [\omega_0; +\infty[$, le complexe $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}$ a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π . On écrit alors :

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) - \pi$$

7. Le phénomène de résonance apparaît lorsque $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est le cas ici, avec $\xi = 0,5$, et on définit la pulsation de résonance ω_R par

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Application numérique : $\omega_R \approx 2,8 \text{ rad.s}^{-1}$.

8. Si le phénomène de résonance existe, alors la courbe de gain présente un maximum atteint pour la pulsation de résonance. Le facteur de surtension établit le rapport entre le module à la résonance et le module aux basses pulsations, et on le note

$$q = \frac{|H(j\omega_R)|}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|}$$

Pour un système d'ordre 2, on trouve

$$q = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

De l'expression du facteur de surtension, on déduit

$$G_{dB}(\omega_R) - \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \log q$$

Ou encore

$$G_{dB}(\omega_R) = -20 \log (2\xi \sqrt{1 - \xi^2}) + 20 \log K$$

Application numérique : $G_{dB}(\omega_R) \approx 28 \text{ dB}$.

9. Position par rapport à l'asymptote basses pulsations : $\omega \in]0; \omega_0]$

On pose : $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ avec $X \in]0; 1]$.

Si on suppose que la courbe de gain est au-dessus de l'asymptote alors :

$$G_{dB}(\omega) - 20 \log K > 0$$

On a donc

$$20 \log \left(\sqrt{(1 - X)^2 + 4\xi^2 X} \right) < 0$$

On doit résoudre alors :

$$(1 - X)^2 + 4\xi^2 X < 1$$

ou encore

$$X(2(2\xi^2 - 1) + X) < 0$$

Comme $X > 0$, la condition se simplifie en $2(2\xi^2 - 1) + X < 0$, donc $X < 2(1 - 2\xi^2)$.

Comme $X \in]0; 1]$, il ne reste à résoudre que l'inégalité suivante

$$2(1 - 2\xi^2) > 1$$

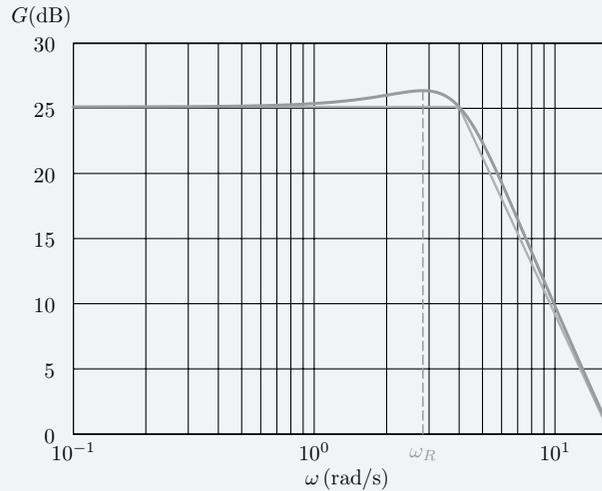
On trouve ainsi une condition sur ξ pour que la courbe de gain soit constamment au-dessus de l'asymptote basses pulsations

$$\xi < 0,5$$

On montre de la même manière que la courbe de gain reste constamment au-dessus de l'asymptote hautes pulsations si $\xi < 0,5$ également.

Un système résonant n'est donc pas constamment au-dessus des asymptotes si $\xi \in [0,5; \sqrt{2}/2[$.

10. À partir des résultats établis précédemment, on trace l'allure du diagramme réel de gain constamment au-dessus du tracé asymptotique, après avoir positionné le point de résonance.



5.25 Bode ordre 3

1. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Par identification, il s'agit d'un système d'ordre 3 et de classe 1, et on détermine :

- le gain statique $K = 10$;
- la pulsation propre $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$;
- le coefficient d'amortissement $\xi = 0,3$.

2. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 - \omega^2 + 0,6j\omega} \times \frac{1}{j\omega}$$

Pour tracer les diagrammes de Bode, on procède par superposition :

- on trace les diagrammes de Bode de $H_1(j\omega) = \frac{10}{1-\omega^2+0,6j\omega}$;
- on trace ceux de $H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$;
- les diagrammes attendus sont obtenus par addition des diagrammes de ces deux fonctions $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$.

La fonction de transfert $H_1(j\omega)$ est d'ordre 2, le diagramme asymptotique de gain est connu :

- une droite de pente nulle et d'ordonnée $20 \log K = 20 \text{ dB}$ pour $\omega \in]0; \omega_0]$;
- une droite de pente -40 dB/décade pour $\omega \in [\omega_0; +\infty[$.

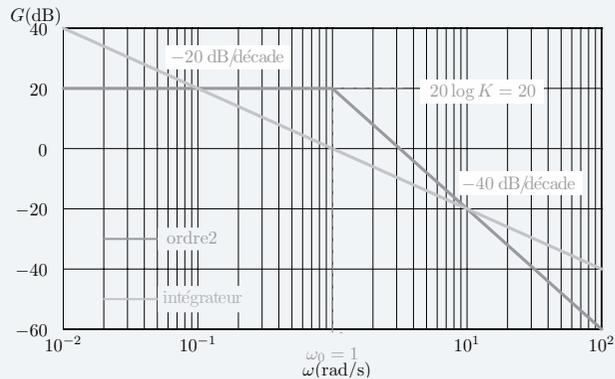
Quant au diagramme asymptotique pour la phase :

- une horizontale à 0° pour $\omega \in]0; \omega_0]$;
- une valeur particulière de -90° pour $\omega = \omega_0$;
- une horizontale à -180° pour $\omega \in [\omega_0; +\infty[$.

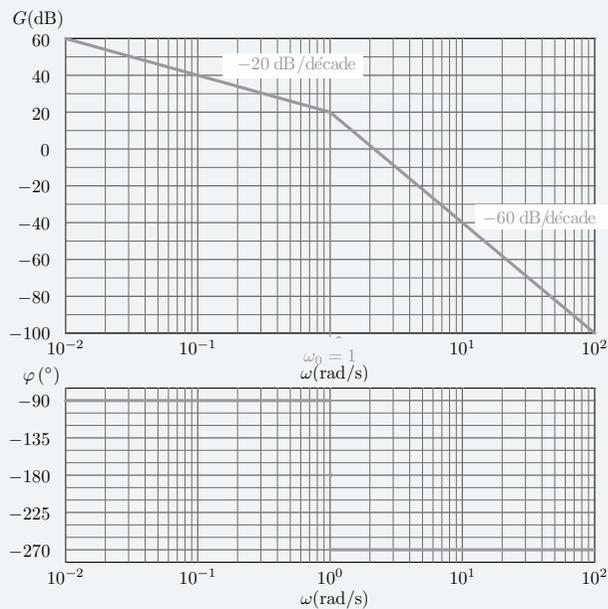
La fonction $H_2(j\omega)$ est celle d'un intégrateur. On a

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ et } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

On obtient les tracés suivants pour le diagramme de gain :



En additionnant les diagrammes de $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$, on obtient



3. Pour tracer le diagramme réel de gain, il faut déterminer la valeur de la pulsation de résonance du système d'ordre 2. Par définition, on a

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

ce qui donne dans ce cas $\omega_R \approx 0,9 \text{ rad.s}^{-1}$.

On calcule alors la valeur du gain pour cette pulsation :

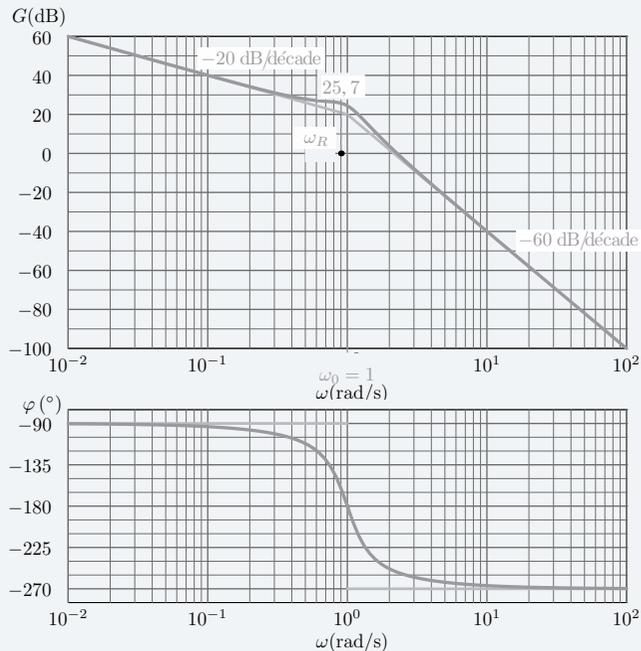
$$G_{dB}(\omega_R) = 20 \log |H_1(i\omega_R)| + 20 \log |H_2(i\omega_R)|$$

soit

$$G_{dB}(\omega_R) = 20 \log K - 20 \log \left(2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right) - 20 \log (\omega_R)$$

On obtient :

$$G_{dB}(\omega_R) \approx 25,7 \text{ rad.s}^{-1}$$



5.26 Lieux de transfert

1 Premier système

$$H_1(p) = \frac{500}{(1 + 80p)(100 + 400p + 111p^2)}$$

1. Le système étudié est d'ordre 3 et de classe 0. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H_1(p) = \frac{K}{(1 + \tau p) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

soit ici, en déterminant par identification $\omega_0 \approx 0,95 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\xi \approx 1,9$.

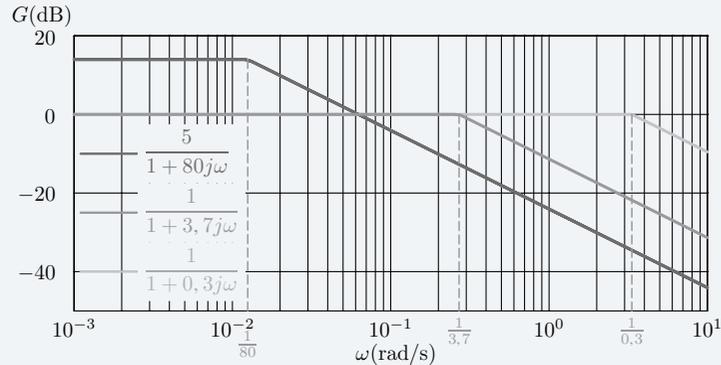
$$H(p) = \frac{5}{(1 + 80p)(1 + 3,7p)(1 + 0,3p)}$$

Toujours par identification, on détermine le gain statique $K = 5$.

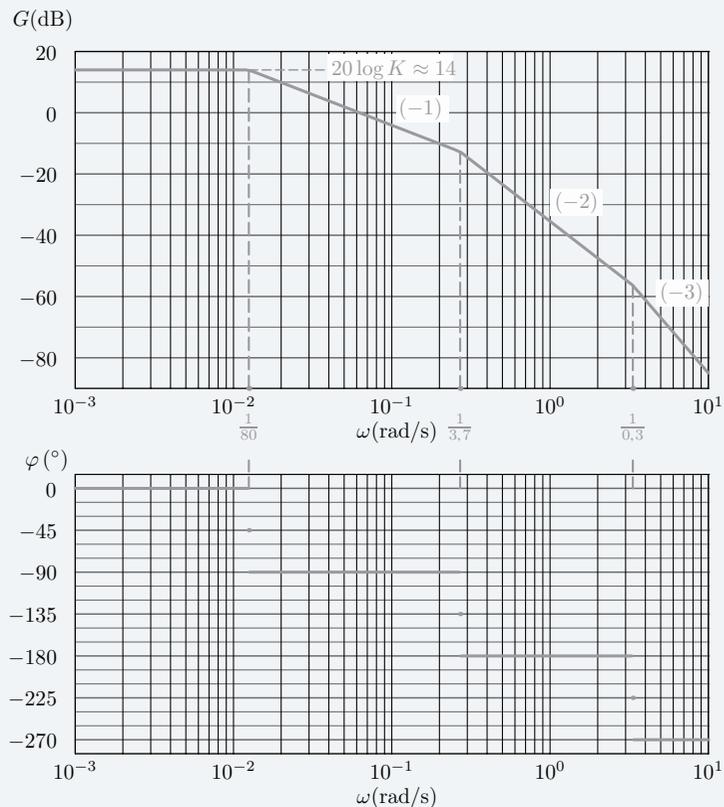
2. Sur le diagramme asymptotique de gain, la pente de l'asymptote basses pulsations est nulle car le système est de classe 0. Le système étant d'ordre 3, l'asymptote hautes pulsations a une pente de -60 dB/décade.
3. Un raisonnement du même type conduit à affirmer que la phase est nulle pour les pulsations basses et vaut -270° pour les pulsations élevées.
4. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$

$$H_1(j\omega) = \underbrace{\frac{5}{1 + 80j\omega}}_{F_1(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + 3,7j\omega}}_{F_2(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + 0,3j\omega}}_{F_3(p)}$$

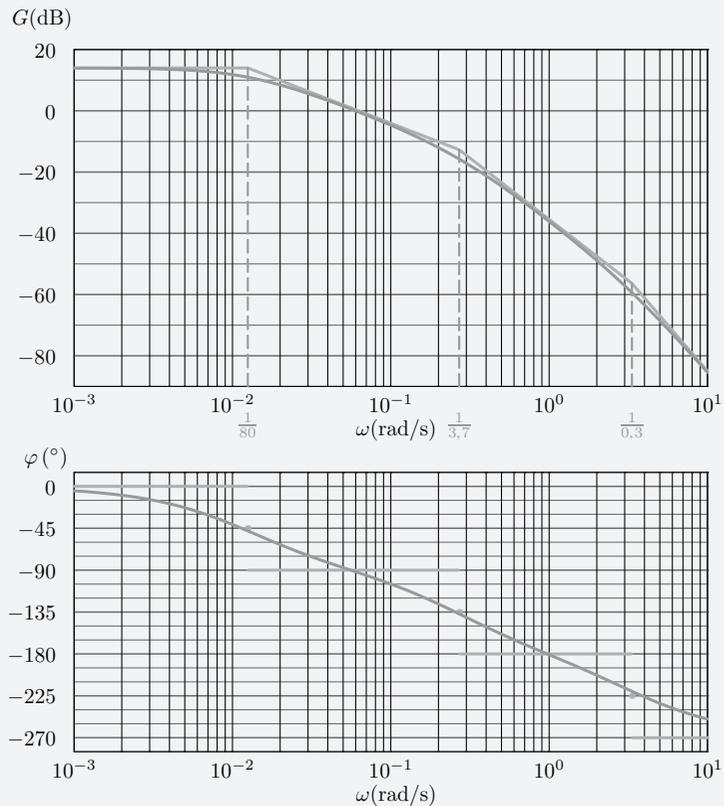
Pour tracer les diagrammes de Bode, on procède par superposition, après avoir tracé les diagrammes des fonctions $F_i(p)$.



En additionnant les diagrammes de $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ et $F_3(j\omega)$, on obtient, en notant les pentes -20 dB/décade, -40 dB/décade et -60 dB/décade respectivement (-1) , (-2) et (-3) .



5. Le diagramme réel de gain suit les asymptotes en étant constamment en dessous de ces asymptotes. Le diagramme de phase est donné pour mémoire.



2 Deuxième système

$$H_2(p) = \frac{2p^2 + 21p + 10}{50p \left(1 + 0,01p + \left(\frac{p}{90} \right)^2 \right)}$$

1. Le système étudié est de classe 1. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H_2(p) = \frac{K}{p} \times \frac{1 + \frac{2\xi_N}{\omega_{0N}}p + \frac{p^2}{\omega_{0N}^2}}{1 + \frac{2\xi_D}{\omega_{0D}}p + \frac{p^2}{\omega_{0D}^2}}$$

soit ici

$$H_2(p) = \frac{0,2}{p} \times \frac{1 + 2,1p + 0,2p^2}{(1 + 0,01p + 1234 \cdot 10^{-7} p^2)}$$

Par identification, on détermine le gain statique $K = 0,2$.

2. Le système est d'ordre 3 et le numérateur est un polynôme de degré 2 alors l'asymptote hautes pulsations aura une pente de -20 dB/décade sur le diagramme asymptotique de gain. L'asymptote basses pulsations a une pente de -20 dB/décade car on a un système de classe 1.

3. Un raisonnement du même type conduit à affirmer que la phase vaut -90° pour des pulsations basses et -270° pour des pulsations élevées.

4. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{0,2}{(1 - 1234 \cdot 10^{-7} \omega^2 + 0,01j\omega)}}_{F_1(p)} \times \underbrace{(1 - 0,2\omega^2 + 2,1j\omega)}_{F_2(p)} \times \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_{F_3(p)}$$

Pour tracer les diagrammes de Bode, on procède par superposition :

- la fonction $F_1(j\omega)$ est une fonction de transfert d'ordre 2 avec $\omega_0 = 90 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\xi = 0,45$. Comme $\xi < \sqrt{2}$, on a un système d'ordre 2 résonnant dont le diagramme asymptotique est connu ;
- la fonction $F_2(j\omega)$ est l'inverse d'une fonction d'ordre 2. Comme $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$ et comme $\arg\left(\frac{1}{x}\right) = -\arg(x)$, alors le diagramme asymptotique de $F_2(j\omega)$ est le diagramme symétrique par rapport à l'axe des abscisses, de celui d'une fonction $G_2(j\omega)$ définie par

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 - 0,2\omega^2 + 2,1j\omega}$$

cette fonction de transfert $G_2(j\omega)$ est d'ordre 2 avec $\omega_0 \approx 2,24 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\xi = 2,35$. On a un système d'ordre 2 aperiodique qui s'écrit comme produit de deux modèles d'ordre 1.

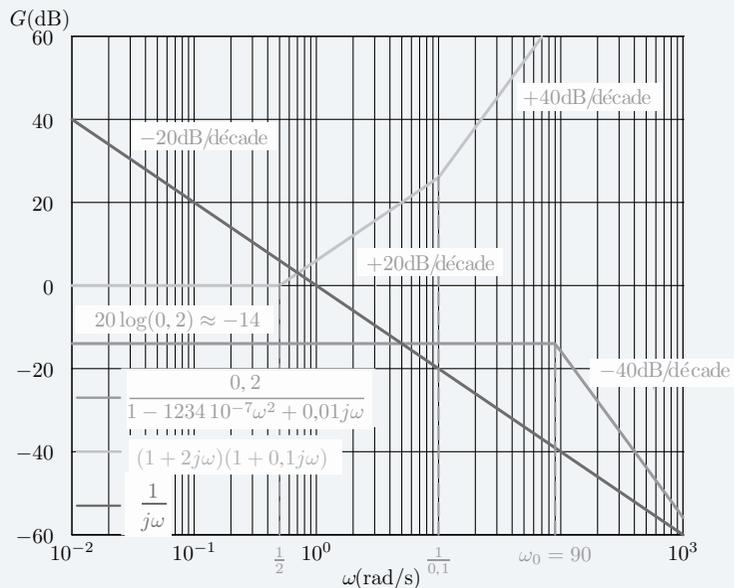
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\omega} \times \frac{1}{1 + 0,1j\omega}$$

On en conclut alors que le diagramme asymptotique de gain de $F_2(j\omega)$ commence par une demi droite de pente nulle pour $\omega \in]0; 0,5]$ et d'ordonnée nulle car le gain statique de $F_2(j\omega)$ vaut 1. Ensuite, il se poursuit par un segment de pente $+20 \text{ dB/décade}$ pour $\omega \in [0,5; 10]$ et se termine par une demi droite de pente $+40 \text{ dB/décade}$ pour $\omega \in [10; +\infty[$.

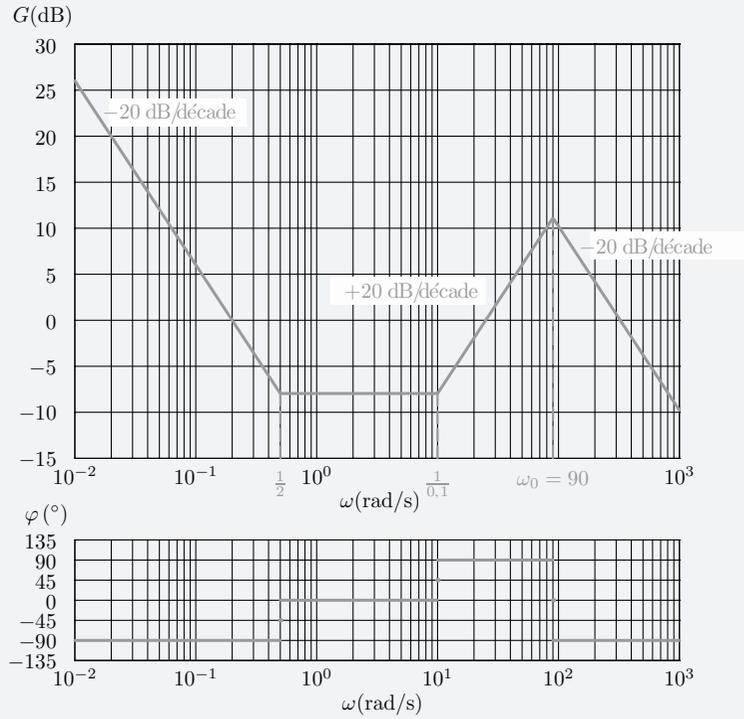
- la fonction $F_3(j\omega)$ représente un intégrateur.

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ et } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

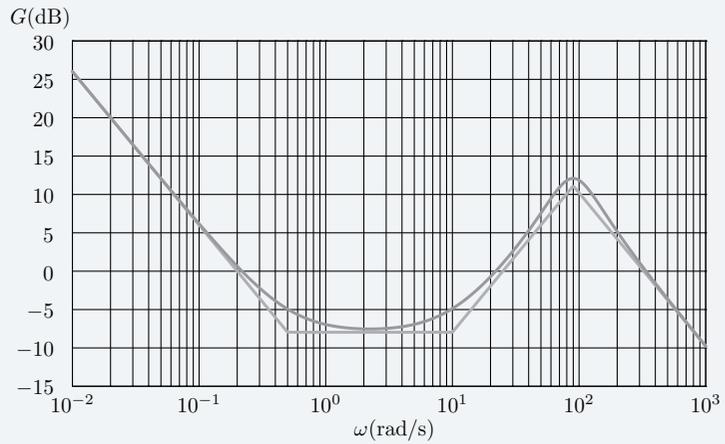
On obtient les tracés suivants pour le diagramme de gain de $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ et $F_3(j\omega)$



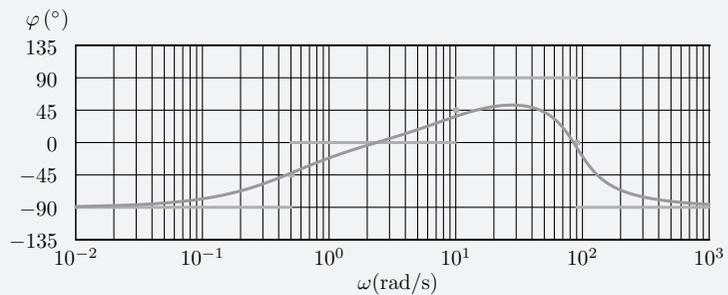
En additionnant les diagrammes de $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ et $F_3(j\omega)$, on obtient



5. Pour préciser l'allure du diagramme réel de gain, comme le système d'ordre 2 est résonant, on calcule le gain pour la pulsation de résonance. On trouve : $G_{dB}(\omega_R) \approx 11$ dB.



Pour le diagramme de phase, il faut calculer la valeur de la phase pour quelques pulsations afin de pouvoir compléter le diagramme asymptotique.



3 Troisième système

$$H_3(p) = \frac{70}{p(p^2 + 0,8p + 4)(100p + 7)}$$

1. Le système étudié est d'ordre 4 et de classe 1. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) (1 + Tp)}$$

soit ici

$$H(p) = \frac{2,5}{p(1 + 0,8p + 0,25p^2) \left(1 + \frac{100p}{7} \right)}$$

Par identification, on détermine le gain statique $K = 2,5$.

2. Sur le diagramme asymptotique de gain, comme le système est d'ordre 4 alors l'asymptote hautes pulsations aura une pente de -80 dB/décade. L'asymptote basses pulsations a une pente de -20 dB/décade car on a un système de classe 1.

3. Un raisonnement du même type conduit à affirmer que la phase vaut -90° pour des pulsations basses et -360° pour des pulsations élevées.

4. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$

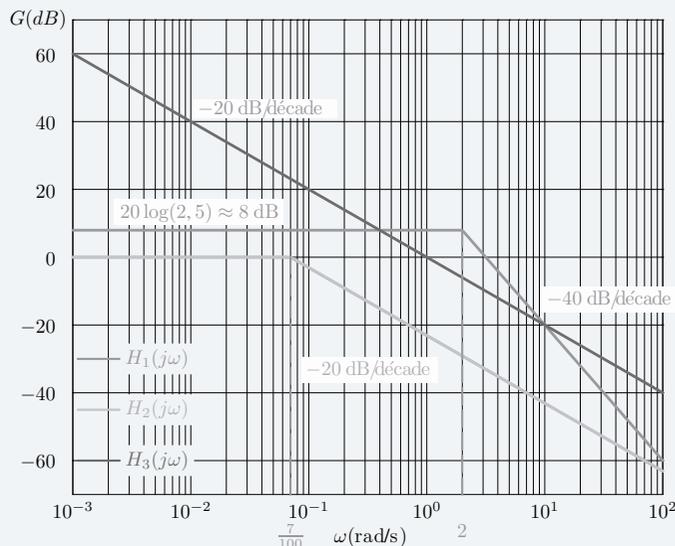
$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1 - 0,25\omega^2 + 0,8j\omega}}_{F_1(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + j\frac{100\omega}{7}}}_{F_2(p)} \times \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_{F_3(p)}$$

Pour tracer les diagrammes de Bode, on procède par superposition :

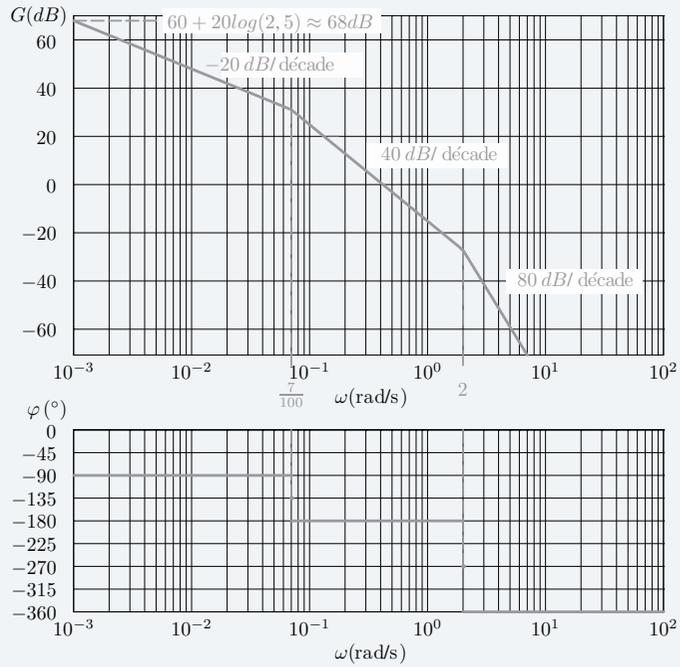
- la fonction $F_1(j\omega)$ est une fonction de transfert d'ordre 2 avec $\omega_0 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\xi = 0,8$. Comme $1 > \xi > \sqrt{2}/2$, on a un système d'ordre 2 pseudopériodique non résonnant dont le diagramme asymptotique est connu.
- la fonction $F_2(j\omega)$ est une fonction de transfert d'ordre 1 dont le diagramme asymptotique est connu.
- la fonction $F_3(j\omega)$ représente un intégrateur.

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ et } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

On obtient les tracés suivants pour le diagramme de gain de $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ et $F_3(j\omega)$

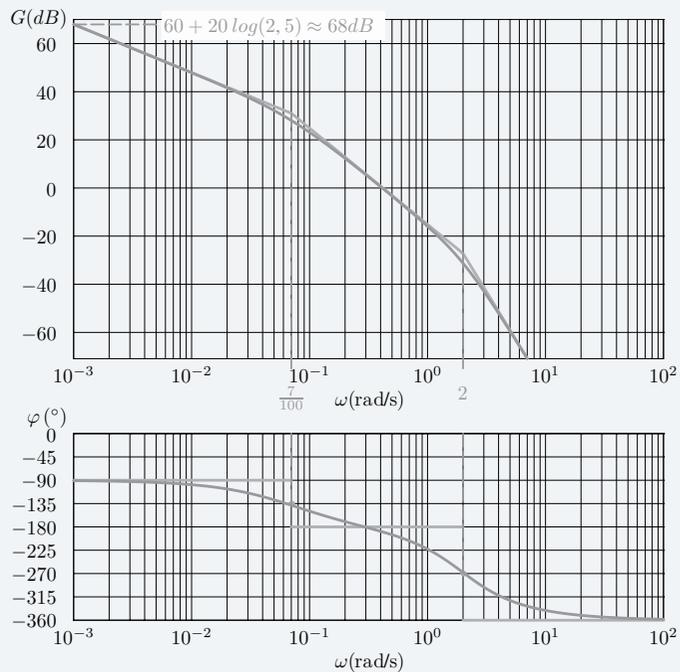


En additionnant les diagrammes de $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ et $F_3(j\omega)$, on obtient



5. Comme le système d'ordre 2 n'est pas résonnant, le diagramme réel de gain est constamment en dessous des asymptotes.

Pour le diagramme de phase, il faut calculer la valeur de la phase pour quelques pulsations afin de pouvoir compléter le diagramme asymptotique.



Plan

Les méthodes à retenir	203
Énoncés des exercices	205
Du mal à démarrer ?	228
Corrigés	230

Thèmes abordés dans les exercices

- justifier la stabilité d'un système
- déterminer graphiquement et analytiquement des marges de stabilité
- lire un diagramme de Black
- caractériser la précision d'un système
- déterminer les caractéristiques d'un correcteur

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- lieux de transfert : diagrammes de Bode
- lieux de transfert : diagrammes de Black
- stabilité
- marges de stabilité
- précision
- correction

Les méthodes à retenir

Pour évaluer la stabilité

- S'appuyer sur la définition de la stabilité. ➔ Exercice 6.1
- Utiliser le critère de Routh. ➔ Exercices 6.2, 6.3
- Utiliser le critère du revers sur un diagramme de Black. ➔ Exercice 6.4

Pour déterminer et régler des marges de stabilité sur un diagramme de Bode

- Lire un diagramme de Bode.
- Identifier la pulsation de coupure à 0 dB.
- Relever la phase correspondante.
- Identifier la pulsation critique.
- Relever le gain correspondant.
- S'appuyer sur la définition des marges de phase et de gain.

➡ Exercices 6.5, 6.6

Pour déterminer et régler des marges de stabilité sur un diagramme de Black

- Lire un diagramme de Black.
- Identifier la pulsation de coupure à 0 dB.
- Relever la phase correspondante.
- Identifier la pulsation critique.
- Relever le gain correspondant.
- S'appuyer sur la définition des marges de phase et de gain.

➡ Exercices 6.7, 6.8

Pour régler une marge d'amplitude

- Lire les courbes isogains dans le plan de Black.

➡ Exercice 6.9

Pour caractériser la précision

- Déterminer l'expression de l'écart.
- Utiliser le théorème de la valeur finale.
- Relever une erreur sur une courbe de réponse temporelle.
- Corréler la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et la précision en boucle fermée.
- Déterminer l'expression de l'erreur en régulation.

➡ Exercice 6.10

➡ Exercice 6.11

➡ Exercices 6.11, 6.12

➡ Exercices 6.10, 6.11, 6.12

Pour étudier le comportement d'un correcteur

- Tracer un diagramme de Bode.
- Déterminer des extremums d'une courbe de gain.
- Caractériser les avantages et inconvénients d'une correction.

➡ Exercices 6.15, 6.16, 6.17

➡ Exercices 6.15, 6.16

➡ Exercices 6.15, 6.16, 6.17, 6.18

Énoncés des exercices

6.1 Train pendulaire

La présentation de ce train pendulaire est faite à la page 143.

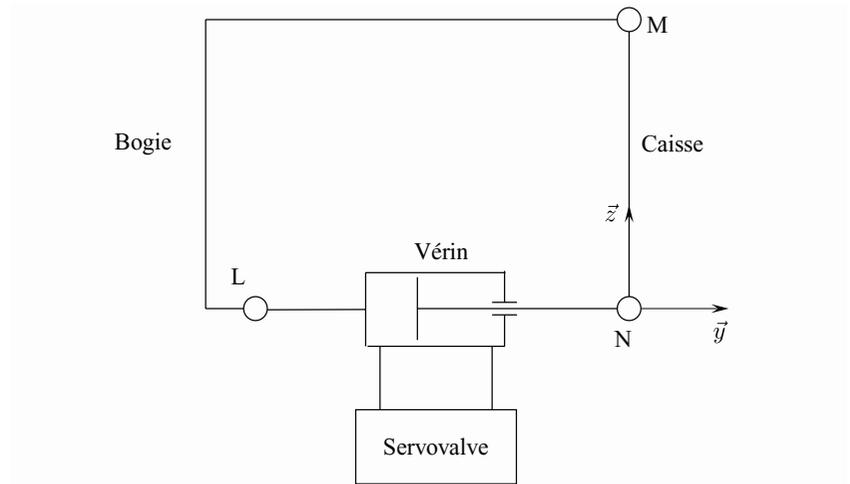


Figure 6.1 – Schéma de principe

Le comportement du vérin est modélisé par

$$q(t) = 2S \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V_0}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (1)$$

avec

- q : débit ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)
- y : position de la tige du vérin (m)
- σ : pression du fluide (Pa)
- S : section du piston (m^2)
- V_0 : volume du vérin (m^3)
- B : module de compressibilité du fluide (Pa^{-1})

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la caisse fournit l'équation suivante

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = RF(t) - C\theta(t) \quad (2)$$

avec

- θ : position angulaire de la caisse (rad)
- F : action mécanique appliquée par le vérin sur la caisse (N)
- J : moment d'inertie de la caisse par rapport à l'axe (M, \vec{x}) ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
- C : raideur ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$)
- R : distance MN (m)

Hypothèse :

On se place dans le cadre des petits déplacements, on a alors

$$y(t) = R\theta(t) \quad (3)$$

1. Écrire les trois équations proposées dans le domaine symbolique.

Afin de simplifier l'écriture, on pose

$$k = \frac{C}{R^2} \quad \text{et} \quad M = \frac{J}{R^2}$$

2. Compléter le schéma-bloc proposé figure 6.2.

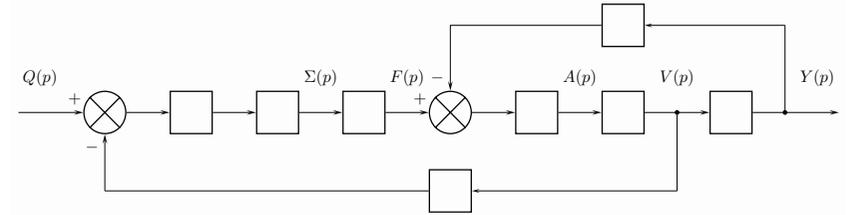


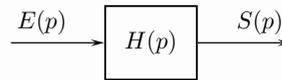
Figure 6.2 – Schéma-bloc à compléter

3. Déterminer la fonction de transfert $\frac{Y(p)}{Q(p)}$. Donner son gain statique, sa classe et ses pôles.

4. Montrer qu'en régime permanent y n'est pas fini. Conclure sur l'instabilité.

6.2 Stabilité

Soit un système décrit par le schéma-bloc suivant



On envisage différents systèmes :

$$H_1(p) = \frac{18}{1 + p + kp^2 + 8p^4}$$

$$H_2(p) = \frac{k}{7 + 3p + 0,01p^2}$$

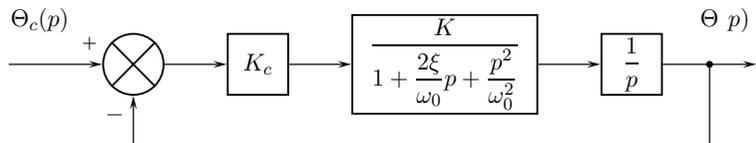
$$H_3(p) = \frac{151}{(k + p)(1 + p - p^2)}$$

$$H_4(p) = \frac{-15}{k + p + 6p^2 + 9p^3}$$

1. Discuter de la stabilité de ces quatre systèmes en fonction de la valeur de k.

6.3 Routh

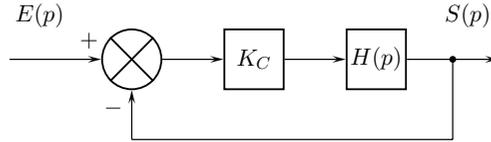
Soit un système décrit par le schéma suivant :



1. Déterminer la condition que doit vérifier le gain K_C du correcteur pour que le système soit stable.

6.4 Limite de stabilité

Soit un système décrit par le schéma suivant :



avec
$$H(p) = \frac{1000}{(100 + p)(1 + 4 \cdot 10^{-4} p + 10^{-6} p^2)}$$

Le diagramme de Black de $H(p)$ est donné figure 6.3.

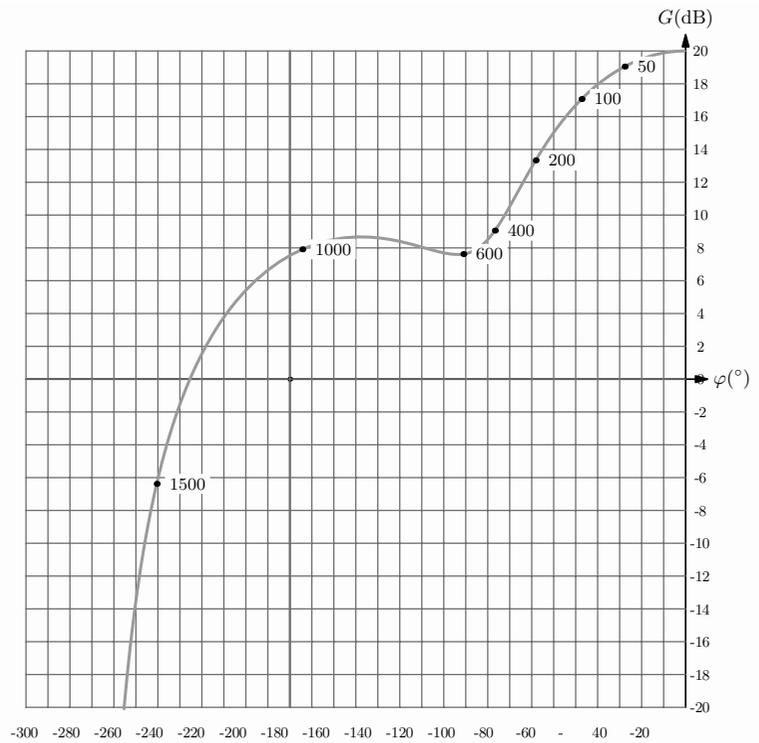
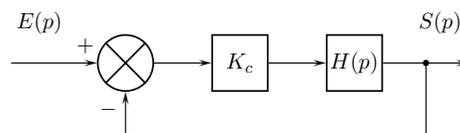


Figure 6.3 – Diagramme de Black de $H(p)$

1. Quelle valeur limite peut-on donner à K_C pour assurer la stabilité en boucle fermée ?

6.5 Marges de stabilité 1

Soit un système décrit par le schéma suivant :



avec :

$$H(p) = \frac{7}{1 + 150p} \times \frac{1}{2 + p} \times \frac{1}{1 + 40p}$$

Afin d'assurer une stabilité suffisante, on souhaite avoir une marge de gain minimale de 15 dB et une marge minimale de phase de 45°.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, avec le gain du correcteur réglé à 10 est donné figure 6.4.

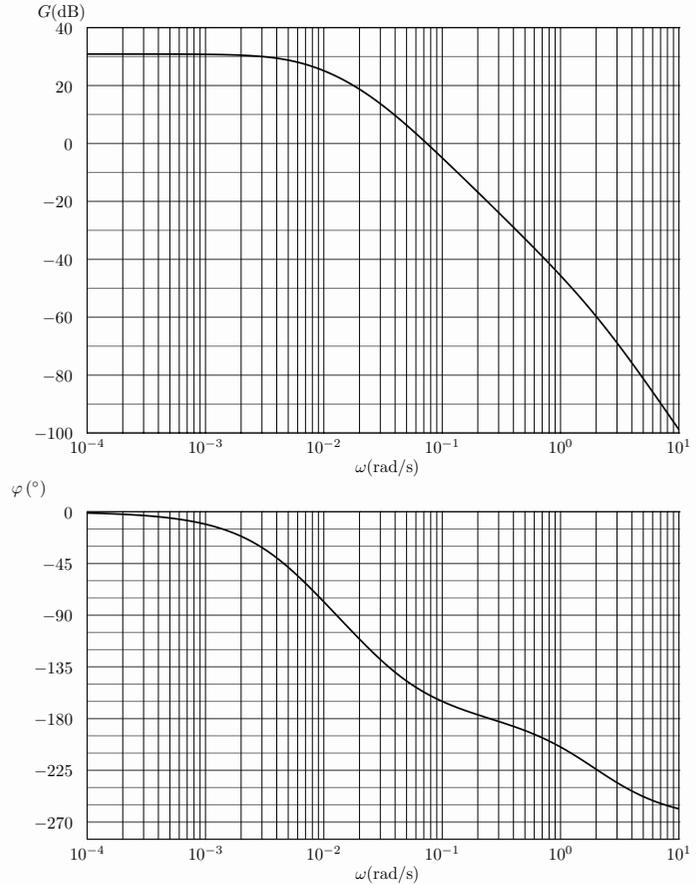
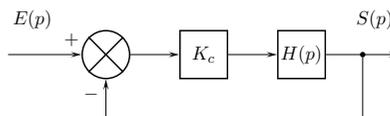


Figure 6.4 – Diagramme de Bode de $B(p)$ avec $K_c = 10$

1. Déterminer analytiquement les marges de phase et de gain.
2. Vérifier graphiquement ces marges.
3. S'il y a lieu, calculer la valeur que doit prendre K_c afin que le système satisfasse les contraintes imposées par le cahier des charges.

6.6 Marges de stabilité 2

Soit un système décrit par le schéma suivant :



Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, avec le gain du correcteur réglé à 150 est donné figure 6.5.

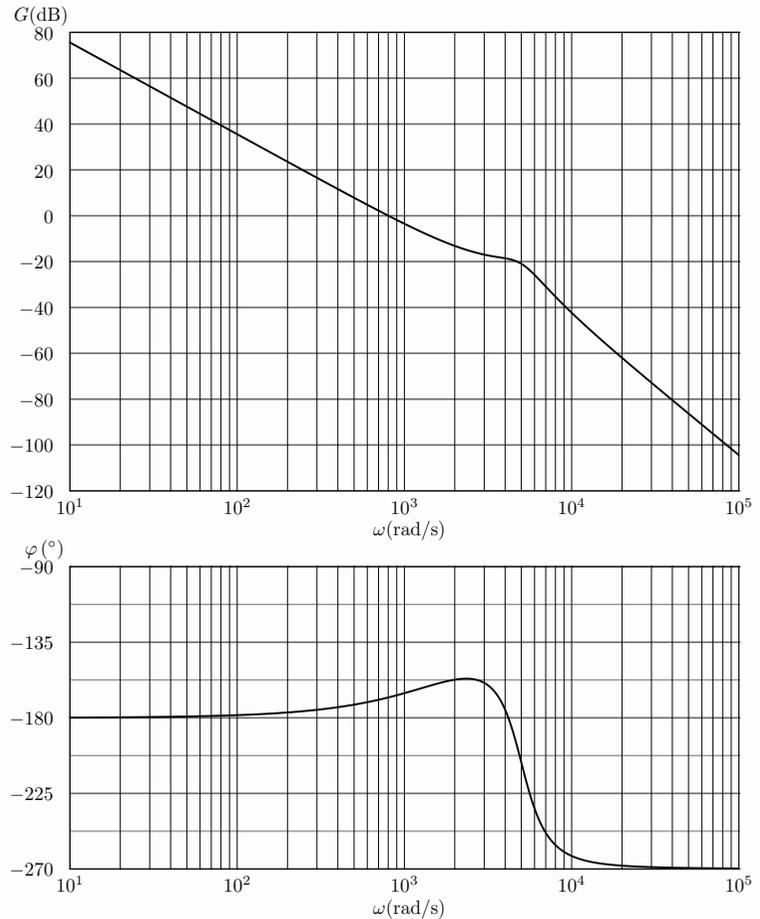
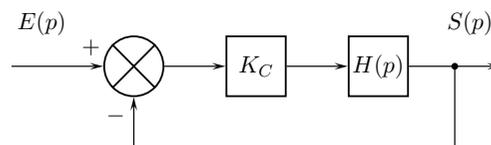


Figure 6.5 – Diagramme de Bode de $B(p)$ avec $K_c = 150$

1. Relever les marges de gain et phase.
2. On souhaite une marge de phase de 45° . Peut-on obtenir la marge de phase désirée en modifiant le gain K_c du correcteur ?

6.7 Marges de stabilité 3

Soit un système décrit par le schéma suivant :



Le diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, avec le gain du correcteur réglé à 10 est donné figure 6.6.

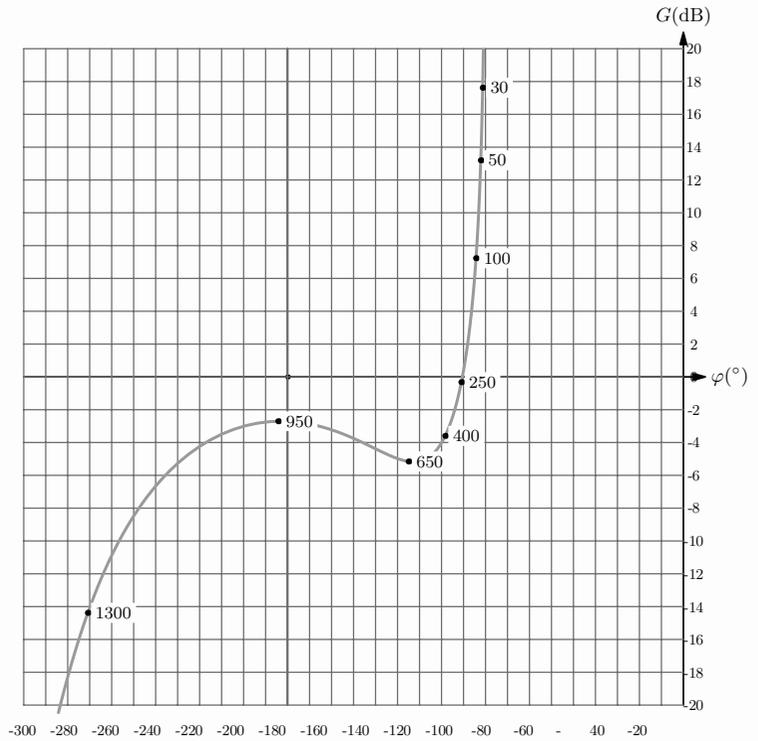
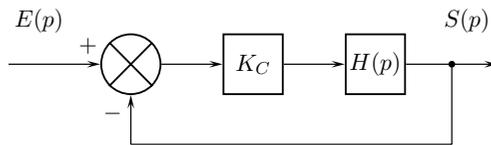


Figure 6.6 – Diagramme de Black de $B(p)$ avec $K_C = 10$

1. Relever les marges de gain et phase.
2. On souhaite une marge de phase d'au moins 45° et une marge de gain d'au moins 12 dB. Peut-on obtenir les marges désirées en modifiant le gain K_C du correcteur ?

6.8 Marges de stabilité 4

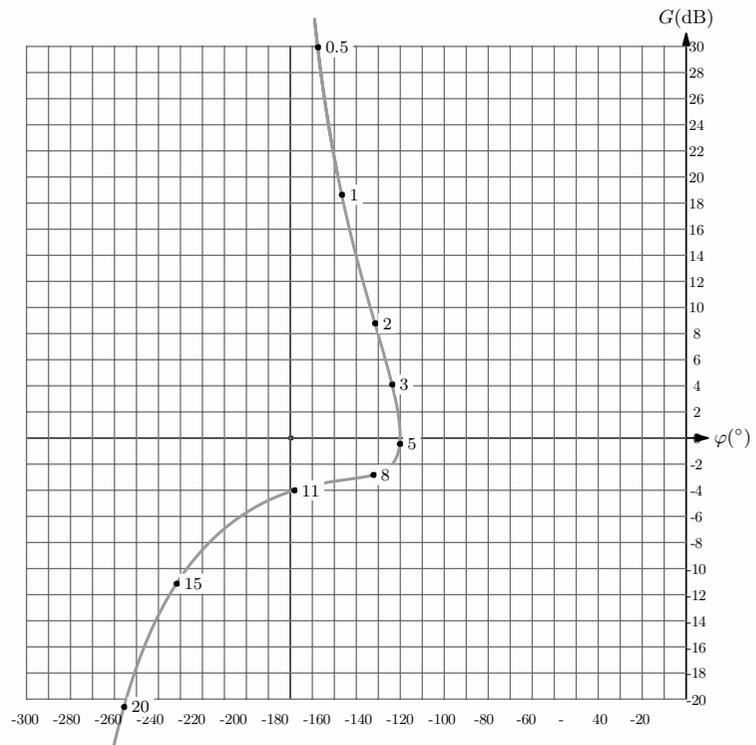
Soit un système décrit par le schéma suivant :



avec
$$H(p) = \frac{73(2 + p)}{p^2(144 + 6,96p + p^2)(4 + 0,03p)} \quad \text{et} \quad K_C = 30$$

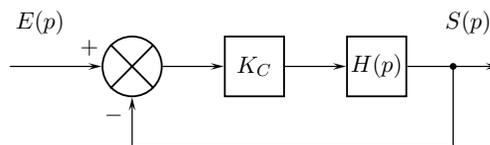
Le diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, est donné figure 6.7.

1. Relever les marges de gain et phase.
2. On souhaite une marge de phase d'au moins 45° et une marge de gain d'au moins 14 dB. Peut-on obtenir les marges désirées en modifiant le gain K_C du correcteur ?

Figure 6.7 – Diagramme de Black de $B(p)$ avec $K_C = 30$

6.9 Marges d'amplitude

Soit un système décrit par le schéma suivant :



$$\text{où } H(p) = \frac{12}{p(1 + 0,2p + 0,01p^2)}$$

Le diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, est donné figure 6.8.

1. Relever les marges de gain et de phase.
2. Relever la surtension du système en boucle fermée et donner un ordre de grandeur de la bande passante à -3 dB.
3. Régler le gain K_C afin de limiter le facteur de surtension en boucle fermée à 1,3.
4. Vérifier que la valeur de K_C trouvée permet d'obtenir des valeurs classiques pour les marges de gain et de phase.
5. Quelle conséquence a le réglage de K_C sur la bande passante à -3 dB ?

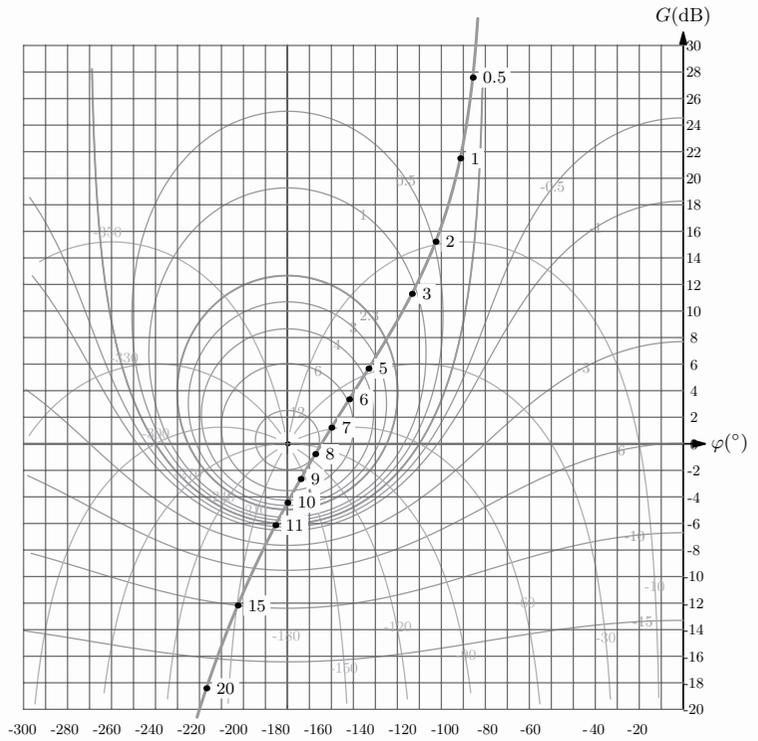


Figure 6.8 – Diagramme de Black de $B(p)$ avec $K_C = 1$

6.10 Commande de gouverne

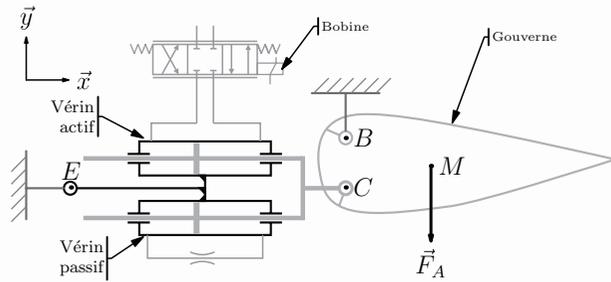


Figure 6.9 – Gouverne en position horizontale

Le dispositif étudié régule la position angulaire d'une gouverne de profondeur d'avion. La rotation de cette gouverne est assurée par le déplacement x de la tige d'un vérin hydraulique actif commandé par un débit, q . Un vérin passif est chargé de l'amortissement du mouvement. Cette mise en position est perturbée par des effets aérodynamiques, F_A . Pour être dans le cadre des systèmes linéaires, on se place autour d'un point de fonctionnement, celui de la figure 6.9. À partir de l'équation de débit du vérin actif et de l'équation obtenue par le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble gouverne-vérins, on peut tracer le schéma-bloc figure 6.10.

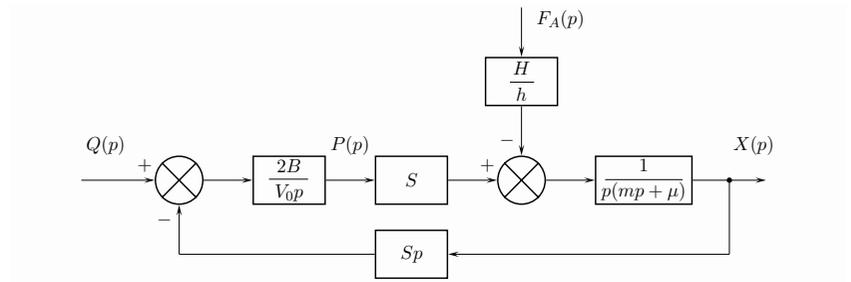


Figure 6.10 – Schéma-bloc de la commande non asservie de la position de la tige du vérin

où :

- B : module de compressibilité du fluide
- V_0 : volume de la chambre du vérin
- S : section utile du vérin
- m : masse de la tige du vérin
- μ : paramètre d'amortissement visqueux
- $h = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{Y}$
- $H = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{X}$

1. Déterminer les fonctions de transfert $G(p)$ et $W(p)$ telles que le schéma proposé puisse se mettre sous la forme de la figure 6.11.

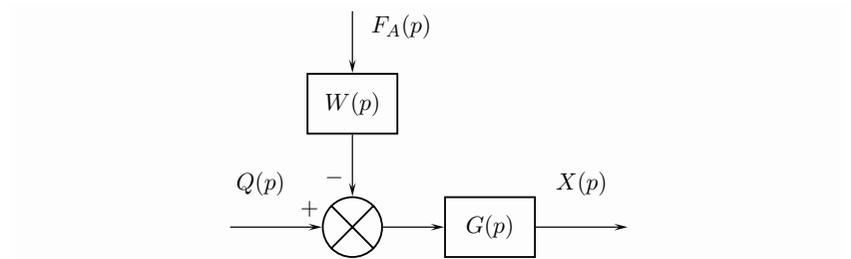


Figure 6.11 – Schéma-bloc équivalent

On réalise l'asservissement de la position x de la tige, figure 6.12. Le débit est délivré par une servovalve commandée en courant. À partir de l'écart, un correcteur-amplificateur proportionnel de gain C fournit le courant i d'alimentation de la bobine de la servovalve. La mesure de la position de la tige du vérin actif est réalisée par un capteur de gain K_M et la consigne de position est traduite par un potentiomètre de gain K_M .

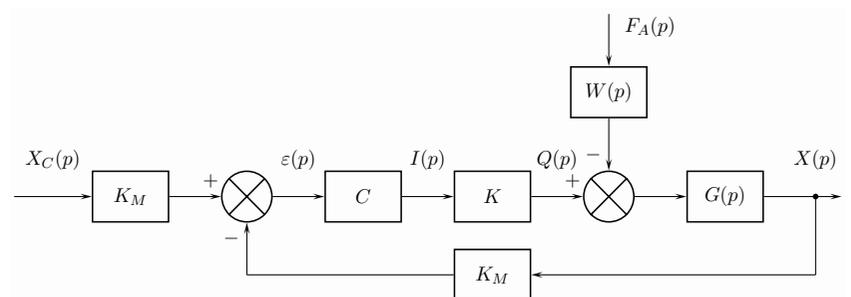


Figure 6.12 – Schéma-bloc de la commande asservie

Le cahier des charges impose en régime permanent :

- une erreur nulle pour une entrée de consigne en échelon ;
- une erreur inférieure ou égale à 2 mm si $x_c(t) = 0,1t$.

2. Montrer qu'en régime permanent le signal de sortie n'est pas affecté par une perturbation en échelon de force d'amplitude F_0 .

Si la perturbation est un échelon, en régime permanent, on peut modéliser l'asservissement de position par le schéma-bloc figure 6.13.

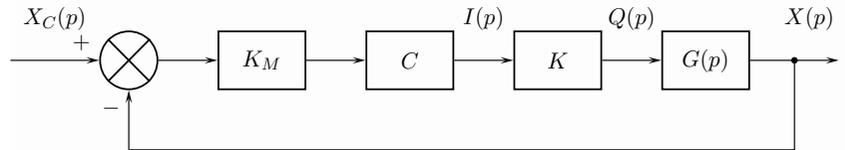


Figure 6.13 – Schéma-bloc sans perturbation

3. Quelle expression doit prendre le gain de boucle afin de satisfaire les exigences du cahier des charges pour la précision ?

6.11 Asservissement de vitesse

Figure 6.14, on propose le schéma-bloc d'un asservissement d'un dispositif régulant la vitesse, ω , d'un moteur perturbé par un couple résistant, c_r .

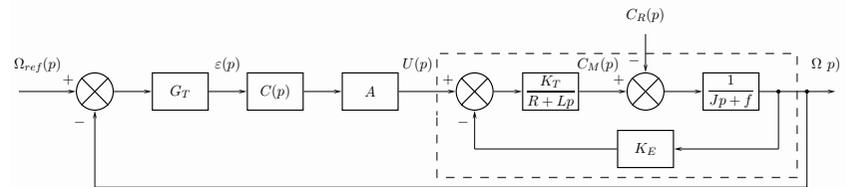


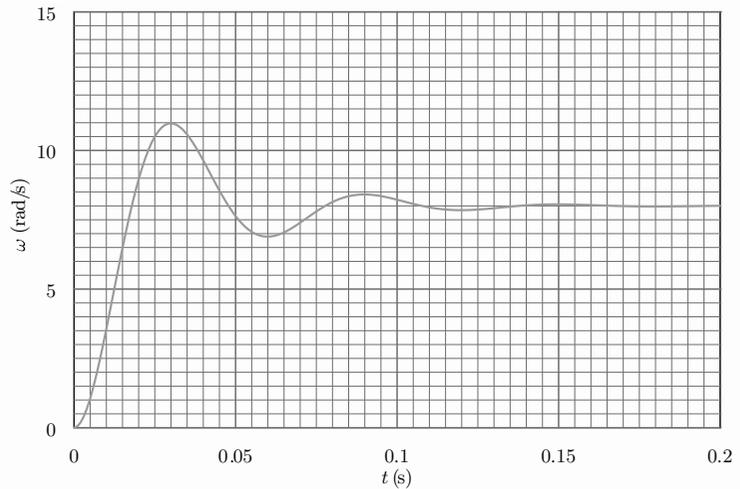
Figure 6.14 – Schéma-bloc de l'asservissement de vitesse

où :

- G_T : gain de la génératrice tachymétrique et du transducteur de consigne, avec $G_T = 0,08V \cdot s \cdot rad^{-1}$
- $C(p)$: fonction de transfert du correcteur
- A : gain de l'amplificateur - $A = 30$
- K_T : constante de couple du moteur
- K_E : constante de force contre électromotrice du moteur
- R : résistance de l'induit
- L : inductance de l'induit
- J : moment d'inertie du rotor par rapport à son axe de rotation
- f : paramètre de frottement visqueux

La figure 6.15 fournit la réponse indicielle du dispositif non perturbé avec un correcteur proportionnel de gain $K = 1$.

1. Déterminer l'erreur de position en régime permanent.
2. En déduire le gain de boucle ainsi que la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.
3. On souhaite une erreur de position inférieure à 1 % ; quelle valeur doit-on donner au gain du correcteur ? Quel problème peut poser la valeur du gain ainsi déterminée ?

Figure 6.15 – Réponse indicielle - consigne : 10 rad.s^{-1}

On considère à présent une perturbation en échelon d'amplitude 100N .

4. La perturbation provoque-t-elle une erreur supplémentaire en régime permanent ?
5. Quelle proposition peut-on faire pour améliorer la précision de cet asservissement de vitesse ?

6.12 Axe de robot

La commande d'axe d'un robot est décrite par le schéma-bloc de la figure 6.16.

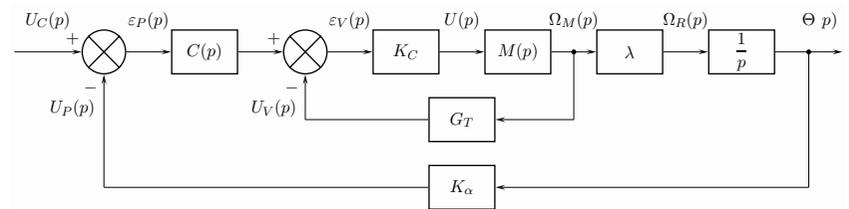


Figure 6.16 – Schéma-bloc de la commande d'un axe de robot

avec :

- $C(p)$: fonction de transfert du correcteur
- $M(p) = \frac{k}{RJp + k^2}$: modélisation du moteur à courant continu
 - R : résistance totale (Ω)
 - J : moment d'inertie équivalent ramené sur l'axe de rotation (kg.m^2)
 - k : constante de couple (N.m.A^{-1}) et constante de vitesse (V.s.rad^{-1})
- λ : rapport de réduction
- G_T : gain de la génératrice tachymétrique (V.s.rad^{-1})
- K_C : gain de l'amplificateur de puissance
- K_α : gain du capteur de position (V.rad^{-1})

Afin d'assurer une mise en position correcte, on ne veut aucun écart de position. Quant à l'écart de traînage il est limité à 1%.

1. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, de cette commande d'axe.
2. Conclure sur la possibilité de pouvoir respecter les critères imposés par le cahier des charges en termes de précision avec un correcteur proportionnel.

6.13 Restituteur d'effort

La présentation de ce restituteur d'effort a été faite à la page 151. Le restituteur est modélisé par le schéma-bloc figure 6.17.

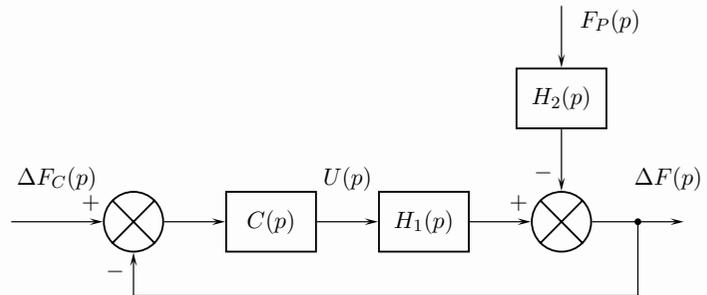


Figure 6.17 – Schéma-bloc du restituteur

$$\text{avec : } H_1(p) = \frac{K_1}{1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3}, \quad H_2(p) = \frac{K_2}{1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3}.$$

Le cahier des charges impose en régime permanent :

- une erreur nulle pour une entrée de consigne en échelon ;
 - une erreur inférieure à $0,1F_0$ pour une perturbation définie par : $f_p(t) = F_0t \times u(t)$ où u représente la fonction de Heaviside.
1. Déterminer la fonction de transfert en poursuite, notée $G(p)$, en fonction notamment de $H_1(p)$.
 2. Démontrer que la précision souhaitée dans le cahier des charges pour une consigne en échelon impose que la fonction de transfert du correcteur soit au moins de classe 1.
 3. Déterminer la fonction de transfert en régulation, notée $R(p)$.
 4. Déterminer l'expression du gain statique du correcteur pour que la précision spécifiée dans le cahier des charges relativement à la perturbation soit vérifiée.

6.14 Dérouleuse

La dérouleuse schématisée figure 6.18 s'insère dans une ligne de production de tôles. Cette ligne de production débute par la coulée de lingots qui sont ensuite laminés et conditionnés en bobines. Ces bobines sont ensuite déroulées par le dispositif étudié pour être débitées en tôles.

En phase établie de production, un double système de mesure détecte en permanence la position de l'axe de la bande par rapport à une position de référence.

Dans un premier temps, le système est en mode recentrage, figure 6.19. Pendant cette phase, la bobine est centrée par rapport à l'axe de la ligne. Seul le signal de mesure délivré par le capteur de position TLC est pris en compte.

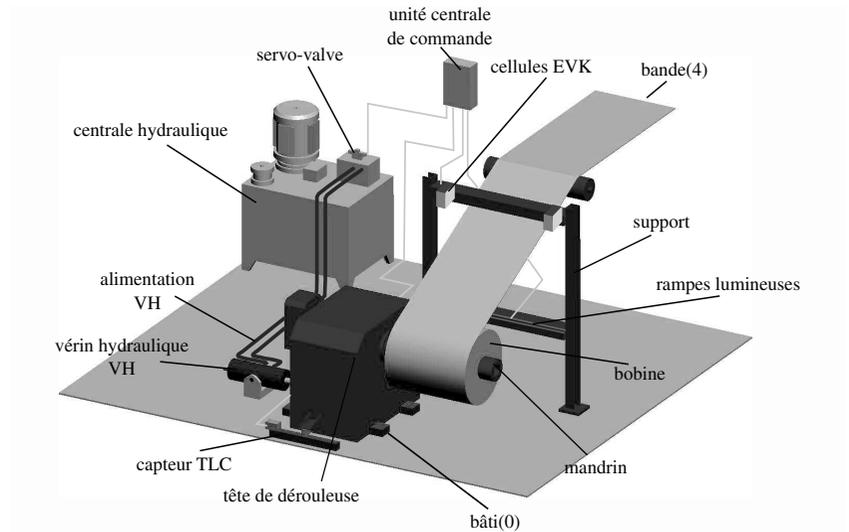


Figure 6.18

Après cette phase préliminaire, le processus normal de production peut commencer, on passe en mode automatique, figure 6.20.

En plus du capteur de position *TLC*, on utilise également deux cellules *EVK* qui mesurent la variation temporelle de la largeur de la bande.

En cours de déroulement, la bande peut s'écarter de sa position de consigne et/ou la largeur de bande peut varier. Les signaux délivrés par les capteurs sont utilisés simultanément afin d'élaborer le signal de commande d'une servovalve. Cette servovalve pilote un vérin hydraulique qui déplace la tête de dérouleuse tant que la bande n'est pas revenue dans l'axe de la ligne.

Étude du mode recentrage

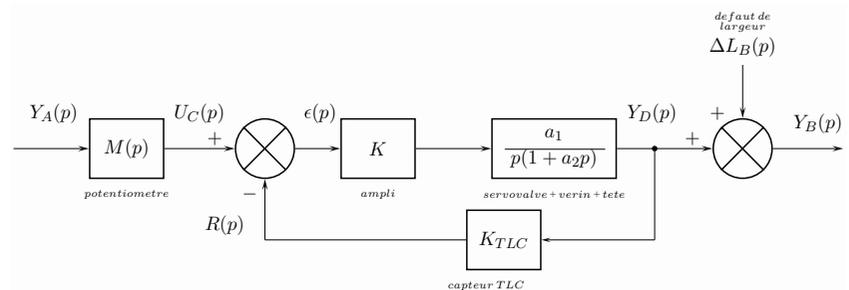


Figure 6.19 – Schéma-bloc en mode recentrage

1. Quelle est l'utilité du bloc de fonction de transfert $M(p)$? Pourquoi $M(p) = K_{TLC}$?
2. Mettre le schéma sous la forme d'un schéma à retour unitaire.
3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Donner sa classe.
4. Déterminer l'expression littérale des fonctions de transfert en poursuite, $\frac{Y_B(p)}{Y_A(p)}$, et en régulation, $\frac{Y_B(p)}{\Delta L_B(p)}$.
5. Conclure sur la possibilité d'avoir une erreur nulle en régime permanent.

Étude du mode automatique

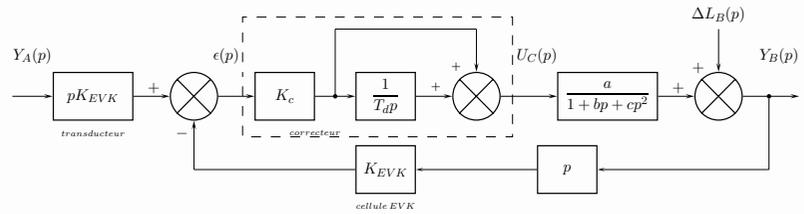


Figure 6.20 – Schéma-bloc en mode automatique

6. À quoi correspond le bloc situé en amont des cellules *EVK* sur la chaîne de retour ?
7. Déterminer les expressions de *a*, *b* et *c*.
8. Déterminer l'expression des fonctions de transfert en poursuite et en régulation.
9. Conclure sur les performances en précision de cet asservissement en mode automatique dans le cas de consigne et de perturbation en échelon.

6.15 Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = K \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad \text{avec} \quad a > 1$$

1. Déterminer l'expression du gain en décibels et de la phase du correcteur.
2. Tracer le diagramme asymptotique de Bode. Pour le tracé, prendre : $K = 3$, $T = 0,5$ s et $a = 9$.
3. Déterminer l'expression de la pulsation pour laquelle la phase atteint son maximum.
4. En déduire l'expression du maximum de phase.
5. Tracer le diagramme de Bode réel du correcteur.
6. Conclure sur les apports d'un correcteur à avance de phase en termes de rapidité, précision et stabilité.

6.16 Correcteur à retard de phase

Un correcteur à retard de phase est défini par la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + bTp} \quad \text{avec} \quad b > 1$$

1. À partir de l'étude menée sur le correcteur à avance de phase, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels. Prendre : $K = 8$, $T = 2$ s et $b = 8$.
2. Quelle est l'intérêt de fixer $K = b$?
3. Conclure sur les apports d'un correcteur à retard de phase en termes de rapidité, précision et stabilité.

6.17 Filtre réjecteur

Soit un correcteur défini par sa fonction de transfert

$$C(p) = K \frac{1 + \frac{2\xi_N}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_D}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec

$$\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1} \quad \xi_N = 0,03 \quad \xi_D = 0,2$$

1. Tracer les diagrammes de Bode.
2. Quels sont les avantages et inconvénients de ce correcteur ?

6.18 Correction tachymétrique

L'asservissement étudié est utilisé pour la commande d'ouverture d'un toit coulissant d'automobile. La chaîne d'énergie se compose essentiellement d'un moteur à courant continu et d'un réducteur. Le schéma-bloc de la figure 6.21 décrit cet asservissement de position.

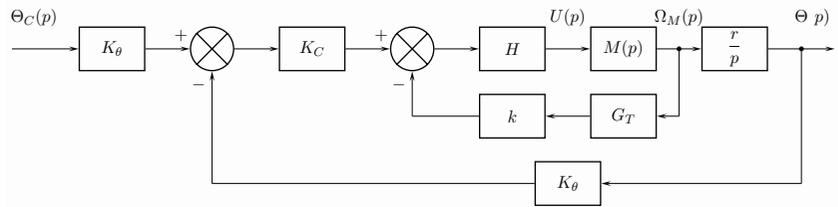


Figure 6.21 – Schéma-bloc de l'asservissement de position d'un toit coulissant

avec :

- K_C : gain du correcteur proportionnel
- r : rapport de réduction
- H : gain du hacheur
- G_T : gain de la génératrice tachymétrique (V.s.rad^{-1})
- k : gain réglable
- K_θ : gain du capteur de position et du transducteur d'entrée (V.rad^{-1})
- $M(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$: modélisation du moteur à courant continu

Pour les applications numériques, prendre :

$$\tau_m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad K_m = 30 \text{ rad.s}^{-1} \text{ V}^{-1} \quad G_T = 0,05 \text{ V.s.rad}^{-1} \quad r = 0,126 \quad K_\theta = 0,3$$

Le constructeur utilise une correction par retour tachymétrique, voir figure 6.21, et complète cette correction par un correcteur proportionnel.

La correction tachymétrique consiste à réaliser une correction par anticipation en utilisant la dérivée de la variable de sortie.

Dans un premier temps, on fixe $k = 0$ ce qui revient à supprimer la correction par retour tachymétrique. On fixe également $H = 1$.

1. Déterminer les fonctions de transfert en boucle ouverte et boucle fermée, notées respectivement $B_O(p)$ et $B_F(p)$.
2. Quelle expression doit avoir K_C si on souhaite un temps de réponse le plus petit possible pour une entrée indicielle ? Faire l'application numérique.
3. Pour cette valeur de K_C , déterminer le temps de réponse à 5 % ainsi que l'écart de traînage en régime permanent.

On prend en compte le retour tachymétrique, on a donc $k \neq 0$, on garde la valeur de K_C trouvée et on impose $H = 10$.

4. Déterminer les fonctions de transfert en boucle ouverte et boucle fermée, notées respectivement $T_O(p)$ et $T_F(p)$.
5. Montrer qu'un choix judicieux de k permet, tout en gardant des conditions de stabilité équivalentes, d'améliorer à la fois la rapidité et la précision. Illustrer les réponses par des tracés appropriés.
6. Quelle est la limite d'utilisation d'une correction par retour tachymétrique ?

6.19 Centrale thermique

Les problèmes de stockage de l'énergie électrique imposent que sa production soit en adéquation avec la consommation électrique des clients. Pour adapter la production à la consommation, une partie des sites de production est régulée.

Un centre de conduite national élabore les adaptations de consignes de chacun des sites régulés.

La régulation mise en place sur les différents sites réalise l'adaptation de la production électrique à la consommation mais avec de légères variations de fréquence du signal délivré sur le réseau.

L'étude porte sur la régulation de la production d'une centrale thermique à flamme dont le principe de fonctionnement est décrit sur la figure 6.22.

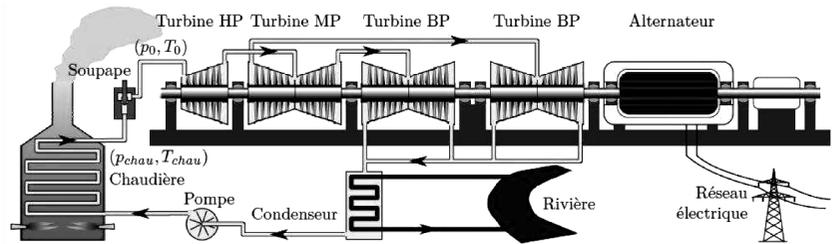


Figure 6.22 – Principe de fonctionnement

Une chaudière fournit la chaleur nécessaire pour produire de la vapeur. Lors de la phase de détente du cycle thermodynamique, cette vapeur sous pression est convertie en énergie mécanique par les turbines. Cette énergie est ensuite transformée en énergie électrique par un alternateur lié à l'arbre des turbines.

Une partie commande régule le débit massique q_m de vapeur alimentant les turbines. Ce débit étant fonction de l'ouverture d'une soupape, on doit réaliser la commande de la position x de cette soupape.

Afin d'être dans le cadre des systèmes linéaires, l'étude est réalisée au voisinage d'un point de fonctionnement.

Cahier des charges

Réguler la puissance	Précision	erreur nulle en régime permanent pour une entrée en échelon
	Rapidité	temps de réponse inférieur au temps de réponse naturel de la turbine
Réguler la fréquence	Stabilité	$M_G > 10$ dB $M_\varphi > 20^\circ$
	Précision	erreur nulle en régime permanent pour une entrée en échelon

Régulation de puissance de la turbine

Le schéma-bloc de cette régulation est proposé figure 6.23

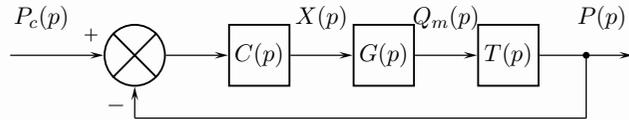


Figure 6.23 – Schéma-bloc de la régulation de puissance

- $P_c(p)$: consigne de puissance, échelon d'amplitude $P_0 = 260 \cdot 10^6$ W
- $P(p)$: puissance produite
- $C(p)$: fonction de transfert du correcteur
- $G(p)$: la soupape est modélisée par un gain pur de valeur K_s
- $T(p)$: modèle de comportement de la turbine

$$T(p) = \frac{K_t}{1 + T_t p} \quad \text{avec} \quad T_t = 6 \text{ s}$$

Choix du correcteur

On propose trois correcteurs d'ordre 1 :

- $C_1(p) = \frac{K_i}{p}$ correcteur intégral
- $C_2(p) = K_{pi} \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ correcteur proportionnel intégral
- $C_3(p) = K \frac{1 + T p}{1 + a T p}$ avec $a > 1$ correcteur à retard de phase

1. La stabilité de la boucle de régulation de puissance est-elle assurée quel que soit le correcteur utilisé ?
2. Quel(s) correcteur(s) doit-on utiliser pour que le critère de précision du cahier des charges soit vérifié ?
3. Montrer que, quel que soit le correcteur intégral choisi, le critère de rapidité ne peut pas être satisfait.

On adopte un correcteur proportionnel intégral. La valeur de K_{pi} est fixée de manière à avoir $K_{pi} K_s K_t = 1$.

4. Déterminer la fonction de transfert $R(p) = \frac{P(p)}{P_c(p)}$.

Régulation de fréquence de la turbine

La consigne de puissance, supposée constante, subit de légères variations provenant de l'ajustement des prévisions à la consommation constatée. Ces ajustements A_c sont modélisés comme une perturbation.

La consommation des clients P_{cl} intervient comme perturbation de la puissance produite.

Le schéma-bloc de cette régulation est proposé figure 6.24.

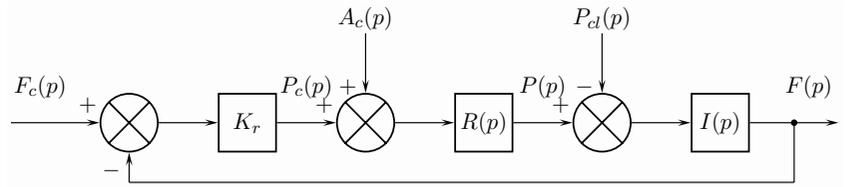


Figure 6.24 – Schéma-bloc de la régulation de fréquence de la turbine

avec

- $F(p)$: fréquence du réseau en Hz
- $F_c(p)$: consigne de fréquence, échelon d'amplitude $F_0 = 50$ Hz
- K_r : gain du correcteur de la boucle de fréquence en $W.s^{-1}$
- $I(p)$: inertie du réseau modélisée par $I(p) = \frac{1}{I_0 p}$ avec $I_0 = 52 \cdot 10^6$ $W.s^2$

5. Montrer qu'on peut trouver T_i afin d'assurer la stabilité de la turbine réglée en fréquence.
6. Démontrer que l'erreur est nulle en régime permanent pour une entrée en échelon de fréquence.

Afin d'assurer une homogénéité sur la régulation des différents sites réglés, on fixe leur comportement en régime permanent relativement aux perturbations

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq 0,04 \frac{F_0}{P_0} (A_{c0} - P_{cl0})$$

avec A_{c0} et P_{cl0} l'amplitude respective des échelons de perturbations A_c et P_{cl}

7. Déterminer l'expression de la valeur limite de K_r permettant d'assurer le comportement souhaité relativement aux perturbations.
8. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte. Prendre $K_r = 13 \cdot 10^7$ $W.s$.
9. On suppose $T_i = T_t$. Calculer la marge de phase.
10. En déduire la valeur que pourrait prendre T_i , notamment relativement à T_t .
11. Cette valeur de T_i permet-elle de vérifier le critère de rapidité ? Conclure.

6.20 Commande du plan horizontal réglable de l'Airbus A340

L'empennage horizontal de l'Airbus A340 est composé d'un plan horizontal réglable (PHR) muni d'un volet de profondeur.

Quelles que soient les conditions de vitesse, l'équilibre de l'avion est assuré en réglant en vol le calage du PHR, c'est à dire en réglant l'angle α formé par la corde du PHR et l'axe de référence de l'avion voir figure 6.25.

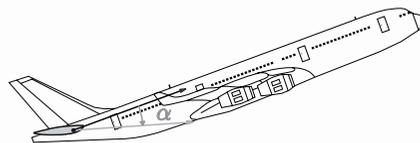


Figure 6.25 – Angle de calage

Le PHR est commandé par le calculateur de bord mais il doit pouvoir l'être également par le pilote en cas de défaillance du dispositif automatique. La consigne, quelle que soit son origine, agit sur des pilotes de distributeurs alimentant les moteurs hydrauliques. Les arbres de sorties de ces moteurs génèrent la rotation du PHR par l'intermédiaire d'un différentiel, d'un réducteur et d'une vis, voir figure 6.26.

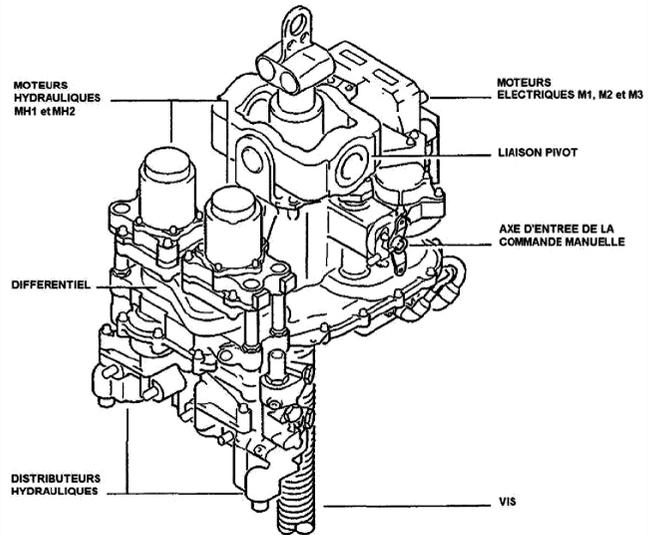


Figure 6.26

L'étude porte sur l'asservissement en position de la vis qui commande la rotation du PHR. La figure 6.27 présente la chaîne cinématique étudiée.

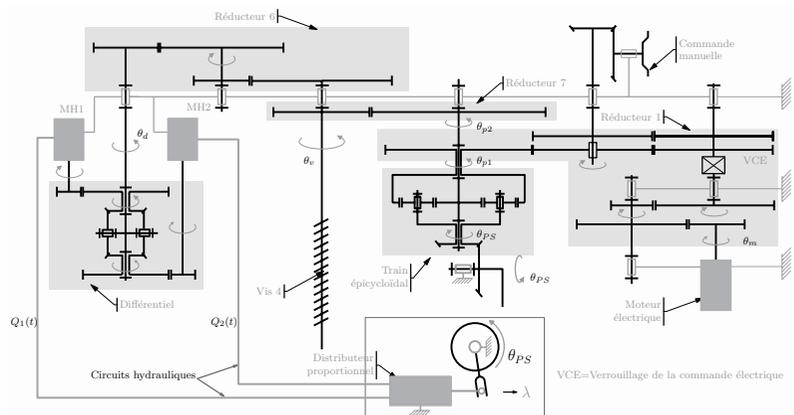


Figure 6.27 – Schéma de principe

Le schéma-bloc de l'asservissement de position de la vis est proposé figure 6.28.

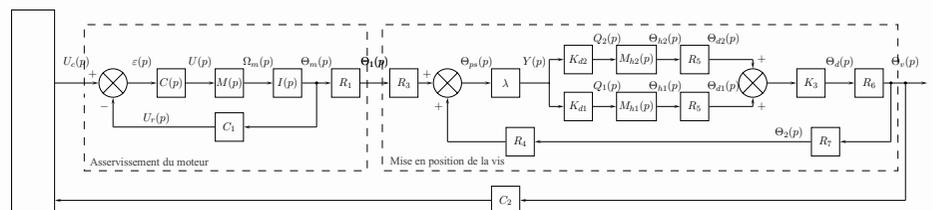


Figure 6.28 – Schéma-bloc

Cahier des charges

Mise en position de la vis	Stabilité	$M_G > 10 \text{ dB}$ $M_\varphi > 45^\circ$
		Surtension en boucle fermée limitée à 0 dB
	Précision	Écart nul en régime permanent pour une entrée en échelon
	Rapidité	Bande passante à -3 dB en boucle fermée supérieure à 5 Hz
Asservissement en position du moteur	Stabilité	Réponse indicielle sans dépassement
	Précision	Écart nul en régime permanent pour une entrée en échelon
		Écart de traînage limité à 0,02 V en régime permanent
	Rapidité	Temps de réponse inférieur à 0,2 s

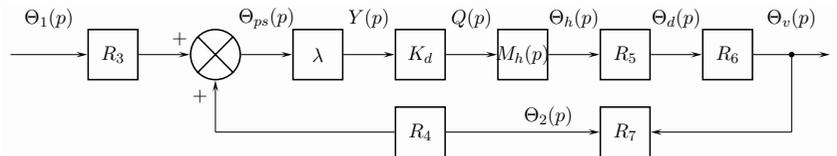
Mise en position de la vis

La mise en position de la vis s'effectue en deux temps :

- La mise en mouvement du rotor du moteur électrique θ_m provoque, par l'intermédiaire du réducteur 1, une rotation θ_1 du grand planétaire P_1 par rapport au référentiel. Cette rotation engendre celle du porte-satellite PS par rapport au référentiel. Le mouvement de PS entraîne alors par l'intermédiaire d'un renvoi d'angle le déplacement y des tiroirs des distributeurs hydrauliques. Les moteurs hydrauliques M_h sont alors alimentés.
- L'alimentation des moteurs hydrauliques conduit, grâce à un différentiel et un réducteur, à la mise en mouvement de la vis par rapport au référentiel. La rotation de la vis d'un angle θ_v entraîne celle θ_2 du petit planétaire P_2 par rapport au référentiel. Cette rotation d'un angle θ_2 provoque une rotation du porte-satellite PS par rapport au référentiel. La position des tiroirs des distributeurs hydrauliques est alors modifiée.

La position θ_{ps} du porte-satellite par rapport au référentiel résulte donc de la rotation des deux planétaires P_1 et P_2 .

1. À quelles conditions le schéma de la figure 6.28 peut-il être réduit à celui de la figure 6.29 ?



$$R_3 = \frac{13}{18} ; R_4 = \frac{5}{18} ; R_5 = -\frac{2}{7} ; R_6 = \frac{1}{5} ; R_7 = -\frac{1}{2} ; K_d = 0,1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

Figure 6.29 – Schéma-bloc de la mise en position de la vis

2. Peut-on parler d'asservissement pour la mise en position de la vis ?

Le fonctionnement du moteur hydraulique est modélisé par

$$M_h(p) = \frac{-K_h}{p \left(1 + \frac{2\xi_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2} \right)}$$

3. Quel doit être le signe de K_h ?

Compte tenu de la linéarité du système, on travaille sur le schéma de la figure 6.30.

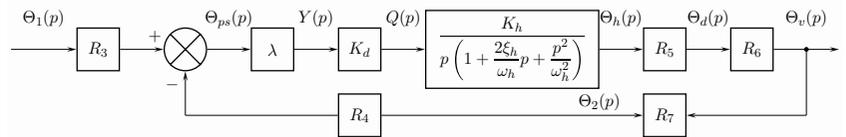


Figure 6.30 – Schéma-bloc de la mise en position de la vis

4. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T_h(p)$.

Les lieux de transfert de $T_h(p)$ sont donnés dans le plan de Bode figure 6.31 et dans le plan de Black figure 6.32.

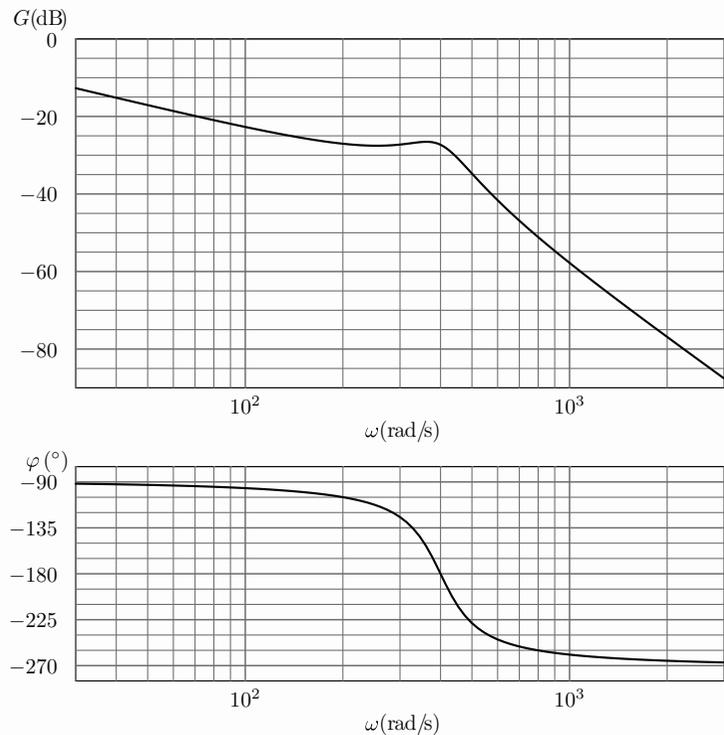


Figure 6.31 – Diagrammes de Bode avec $\lambda = 0,015 \text{ m}\cdot\text{rad}^{-1}$

5. Justifier l'allure des diagrammes de Bode.

À partir des lieux de transfert proposés,

6. Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert du moteur hydraulique $M_h(p)$.
7. Relever les marges de gain et de phase.
8. Quelle valeur limite peut prendre λ pour respecter les marges de stabilité imposées dans le cahier des charges ?
9. Déterminer la surtension en boucle fermée pour la valeur limite de λ .
10. Déterminer la valeur minimale de λ afin de respecter le critère de bande passante.
11. Conclure sur le respect des différents critères définis dans le cahier des charges.

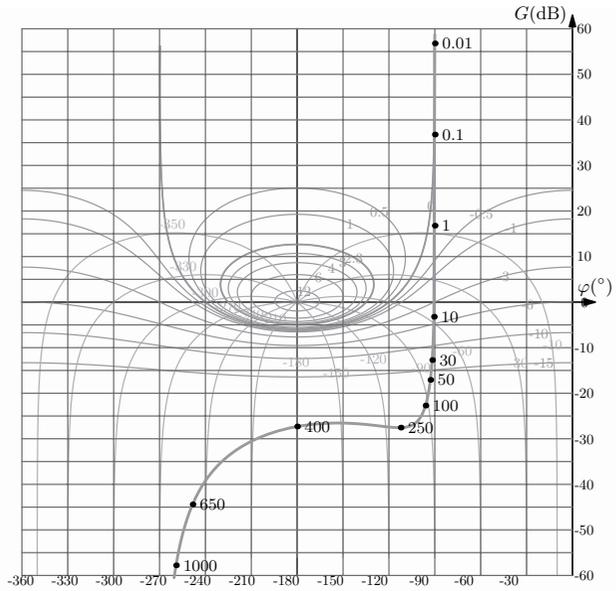


Figure 6.32 – Diagramme de Black avec $\lambda = 0,015 \text{ m}\cdot\text{rad}^{-1}$

Asservissement en position du moteur électrique

Le fonctionnement du moteur électrique utilisé est décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} u(t) &= e(t) + Ri(t) \\ e(t) &= K_v \omega_m(t) \\ c_m(t) &= K_c i(t) \\ J \frac{d}{dt} \omega_m(t) &= c_m(t) \end{aligned}$$

avec :

- i : courant d'induit(A)
- u : tension aux bornes de l'induit(V)
- e : force contre électromotrice (V)
- c_m : couple moteur (N.m)
- ω_m : taux de rotation du moteur ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)
- $R = 1 \Omega$: résistance totale
- $J = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$: Moment d'inertie de l'ensemble mobile par rapport à l'axe de rotation du rotor
- $K_v = 0,02 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$: constante de vitesse
- $K_c = 0,02 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$: constante de couple

L'asservissement en position du moteur est décrit figure 6.33

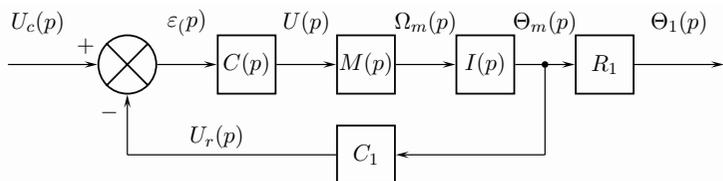


Figure 6.33 – Schéma-bloc de l'asservissement en position du moteur

avec

- $C(p)$: fonction de transfert du correcteur
- R_1 : rapport de transmission du réducteur 1
- C_1 : gain de la chaîne de mesure de la position

Dans un premier temps on utilise un correcteur proportionnel de gain K_1 .

- Déterminer les fonctions de transfert $M(p)$ et $I(p)$.
- En déduire la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ puis le gain de boucle K_{BO} .
- Modifier le schéma proposé figure 6.33 afin d'avoir un schéma à retour unitaire.
- En déduire la fonction de transfert en boucle fermée $G(p)$, la mettre sous forme canonique.
- Déterminer l'expression de K_{BO} permettant de valider le critère de stabilité du cahier des charges.
- Vérifier que les critères de rapidité et de précision statique sont respectés avec le gain de boucle déterminé.

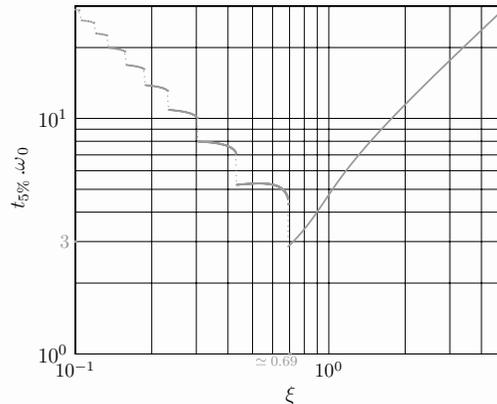


Figure 6.34 – Temps de réponse réduit

- Déterminer l'écart de traînage pour la valeur de K_{BO} calculée. Conclure.

On fournit sur la figure 6.35 le lieu de transfert en boucle ouverte avec

- un correcteur proportionnel de gain K_1
- un correcteur à avance de phase de fonction de transfert

$$C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad \text{avec} \quad a > 1$$

- un correcteur à retard de phase de fonction de transfert

$$C(p) = K_r \frac{1 + Tp}{1 + bTp} \quad \text{avec} \quad b > 1$$

Pour le tracé, on a choisi $T = 0,02$ s et $a = b = 2$. Par ailleurs, on a fixé $K_1 = K_a = K_r$ de manière à avoir $K_{BO} = 25$.

- Quelle valeur doit-on adopter pour K_{BO} pour obtenir l'écart de traînage souhaité ?
- Quel correcteur peut-on choisir pour respecter les contraintes du cahier des charges ?

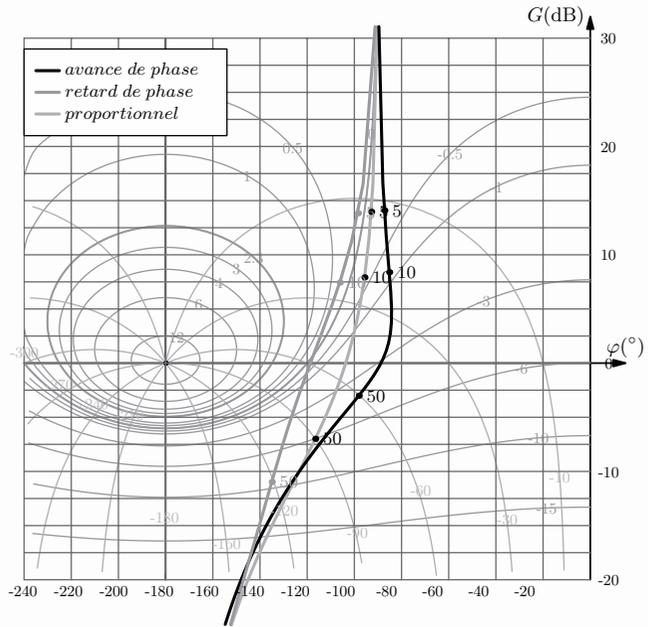


Figure 6.35 – Diagrammes de Black avec différents correcteurs

Du mal à démarrer ?

6.1 1. Utiliser la transformée de Laplace.

4. Déplacer le point de prélèvement.

6.2 Revenir à la définition de la stabilité et utiliser, si nécessaire, le critère de Routh.

6.3 Utiliser le critère de Routh.

6.4 Définir le point critique et le situer dans le plan de Black.

6.5 - 6.6 - 6.7 - 6.8 1. Revenir à la définition des marges de gain et de phase.

6.9 3. Utiliser les courbes isogains et appliquer la définition de bande passante.

4. Déterminer la valeur maximale du gain en décibels.

6.10 1. Annuler successivement chacune des entrées.

2. Déterminer $X(p)$ en fonction de $F_A(p)$ puis utiliser le théorème de la valeur finale.

3. Définir l'erreur, déterminer son expression littérale puis utiliser le théorème de la valeur finale.

6.11 1. Définir l'erreur.

2. Déterminer l'expression littérale de l'erreur.

5. Déplacer un sommateur, réduire la boucle interne puis déterminer la fonction de transfert en régulation.

6.12 1. Réduire la boucle interne.

2. Faire la différence entre écart et erreur

6.13 1. Annuler l'entrée de perturbation.

2. Définir l'erreur.

3. Annuler l'entrée de consigne.

6.14 5. Annuler successivement chacune des entrées.

6. Utiliser le principe de superposition.

8. Réduire le schéma figure 6.20 et identifier.

9. Annuler successivement chacune des entrées.

6.15 1. Penser à utiliser les propriétés du logarithme et de l'argument d'un complexe..

2. Tracer les diagrammes de Bode de fonctions de transfert de référence.

6.16 1. Tracer les diagrammes de Bode de fonctions de transfert de référence.

6.17 1. Utiliser les propriétés des diagrammes de Bode des systèmes d'ordre 2.

6.18 3. Revenir aux propriétés de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre.

4. Définir l'écart.

5. Réduire la boucle interne.

6.19 3. Utiliser les propriétés de la fonction de transfert en boucle ouverte.

4. Définir les qualités du système d'ordre 2 le plus rapide.

6. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée puis utiliser le critère de Routh.

8. Annuler successivement les entrées de perturbation, utiliser le principe de superposition puis le théorème de la valeur finale.

9. Tracer les diagrammes de Bode de fonctions de transfert de référence.

10. Revenir à la définition de la marge de phase.

6.20 4. Vérifier la stabilité.

6. Étudier les asymptotes basses et hautes fréquences.

8. Revenir à la définition des marges de gain et de phase.

10. Revenir à la définition de la surtension et à l'utilisation des courbes isogains.

13. Utiliser la transformation de Laplace.

17. Définir les caractéristiques d'un système d'ordre 2 non dépassant.

18. Utiliser l'abaque fourni pour la rapidité et définir la notion d'écart pour la précision.

Corrigés des exercices

6.1 Train pendulaire

1. Si on suppose les conditions initiales nulles alors par transformation de Laplace, on obtient :

$$Q(p) = 2SpY(p) + \frac{V_0}{2B} p \Sigma(p) \quad (1)$$

$$Y(p) = R\Theta(p) \quad (2)$$

$$Jp^2\Theta(p) = RF(p) - C\Theta(p) \quad (3)$$

2. En utilisant la notation proposée, on obtient pour (3) :

$$Mp^2Y(p) = F(p) - kY(p)$$

En remarquant que :

$$V(p) = pY(p) \quad \text{et} \quad A(p) = pV(p)$$

on écrit

$$A(p) = \frac{1}{M} (F(p) - kY(p))$$

Par ailleurs, (1) peut s'écrire

$$\Sigma(p) = \frac{2B}{V_0} \frac{1}{p} (Q(p) - 2SV(p))$$

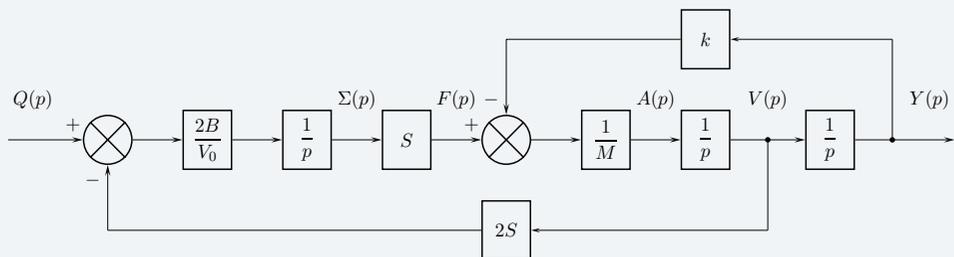
Il reste à lier la pression du fluide à l'effort développé par le vérin, on sait que :

$$F(t) = \sigma(t)S$$

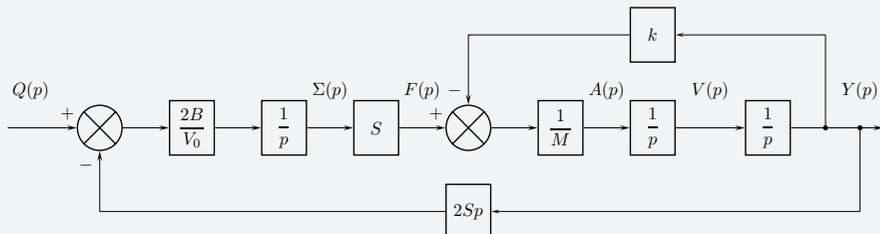
soit

$$F(p) = S\Sigma(p)$$

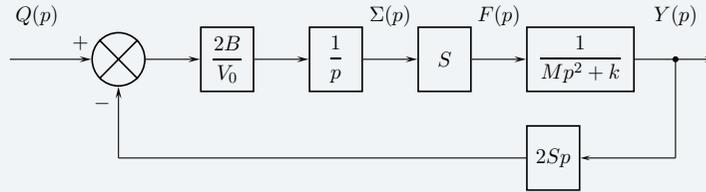
On obtient le schéma-bloc suivant :



3. Pour déterminer la fonction de transfert $\frac{Y(p)}{Q(p)}$, il faut d'abord retracer le schéma afin d'avoir deux boucles imbriquées. Par déplacement du point de prélèvement, on obtient :



En réduisant d'abord la boucle interne, on trouve :



En appliquant les résultats classiques d'algèbre des schémas, on trouve alors

$$\frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{2BS^2p + V_0p(Mp^2 + k)}$$

Pour mettre en évidence le gain statique, on écrit la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{2BS^2 + kV_0} \frac{1}{p \left(1 + \frac{MV_0}{2BS^2 + kV_0} p^2 \right)}$$

On a une fonction de transfert de gain statique

$$\frac{2BS}{2BS^2 + kV_0}$$

de classe 1 dont les pôles sont

$$\pm j \frac{2BS^2 + kV_0}{MV_0}$$

4. Si la réponse indicielle d'un système, en régime permanent, tend vers une valeur finie alors le système est stable.

Si on impose un échelon unitaire en entrée, la réponse indicielle du système étudié est :

$$Y(p) = \frac{2BS}{2BS^2 + kV_0} \frac{1}{p \left(1 + \frac{MV_0}{2BS^2 + kV_0} p^2 \right)} \frac{1}{p}$$

Par décomposition en éléments simples, on a

$$Y(p) = \frac{W}{p} + \frac{X}{p^2} + \frac{Yp + Z}{1 + \frac{MV_0}{2BS^2 + kV_0} p^2}$$

Par transformation inverse, on obtient finalement

$$y(t) = W + Xt + Y\omega^2 \cos(\omega t) + Z\omega \sin(\omega t)$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{2BS^2 + kV_0}{MV_0}}$$

On conclut alors sur l'instabilité de l'ensemble vérin + caisse car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

6.2 Stabilité absolue

1 Premier système

$$H_1(p) = \frac{18}{1 + p + kp^2 + 8p^4}$$

1. Pour qu'un système soit stable, il faut que tous les coefficients du polynôme situé au dénominateur de la fonction de transfert soient non nuls et de même signe. Ici, le coefficient de p^3 est nul. On peut donc conclure sur la non stabilité du système.

2 Deuxième système

$$H_2(p) = \frac{1}{7 + 3p + 0,01p^2}$$

1. On a un système d'ordre 2 et tous les coefficients du polynôme situé au dénominateur sont positifs alors on peut affirmer que ce système est stable.

3 Troisième système

$$H_3(p) = \frac{151}{(k+p)(1+p-p^2)}$$

1. En développant, on obtient :

$$H_3(p) = \frac{151}{k + (k+1)p + (1-k)p^2 - p^3}$$

Pour que le système puisse être stable, il faut que tous les coefficients du polynôme situé au dénominateur soient de même signe et non nuls.

On doit donc avoir

$$k < 0$$

$$k + 1 < 0$$

$$1 - k < 0$$

On ne peut pas trouver k vérifiant ces trois conditions. Le système est inconditionnellement instable.

4 Quatrième système

$$H_4(p) = \frac{-15}{14 + p + 6p^2 + 9p^3}$$

1. Tous les coefficients du polynôme du dénominateur sont positifs. Pour pouvoir conclure il faut dresser le tableau de Routh afin de déterminer si tous les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

$$\begin{array}{cccc} p^3 & 9 & 6 & 0 \\ p^2 & 1 & 14 & 0 \\ p^1 & A_1 & A_2 & \\ p^0 & \underbrace{B_1} & & \\ & \text{pivots} & & \end{array}$$

où :

$$A_1 = -\frac{1}{2 \times 6} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_2 = 0$$

et

$$B_1 = -\frac{1}{A_1} \begin{vmatrix} 6 & 14 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 14.$$

Tous les pivots sont de même signe alors tous les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative donc le système est stable.

6.3 Critère de Routh

1. Un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative. Pour cela il faut, mais il ne suffit pas, que tous les coefficients du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée soient non nuls et de même signe.

On établit la fonction de transfert en boucle fermée à partir du schéma-bloc, on trouve :

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{K K_c}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) + K K_c}$$

ou encore :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K K_c \omega_0^2}{p^3 + 2\xi \omega_0 p^2 + \omega_0^2 p + K K_c \omega_0^2}.$$

Si on suppose K et K_c de même signe et non nuls, tous les coefficients de $D(p)$ sont strictement positifs. Pour connaître le signe des pôles de $H(p)$ on construit le tableau de Routh :

$$\begin{array}{cccc} p^3 & 1 & \omega_0^2 & 0 \\ p^2 & 2\xi \omega_0 & K K_c \omega_0^2 & 0 \\ p^1 & A_1 & A_2 & \\ p^0 & \underbrace{B_1}_{\text{pivots}} & & \end{array}$$

où :

$$A_1 = -\frac{1}{2\xi \omega_0} \begin{vmatrix} 1 & \omega_0^2 \\ 2\xi \omega_0 & K K_c \omega_0^2 \end{vmatrix} = (2\xi \omega_0 - K K_c) \frac{\omega_0}{2\xi}$$

$$A_2 = 0$$

$$B_1 = -\frac{1}{A_1} \begin{vmatrix} 2\xi \omega_0 & K K_c \omega_0^2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = K K_c \omega_0^2.$$

Pour que les pôles soient à partie réelle strictement négative, il faut que tous les termes de la colonne des pivots soient tous non nuls et de même signe, ici positifs. Il faut donc que :

$$2\xi \omega_0 - K K_c > 0$$

Si $K_c > 0$ et $K > 0$ alors

$$K_c < \frac{2\xi \omega_0}{K}$$

Si $K_c < 0$ et $K < 0$ alors

$$K_c > \frac{2\xi \omega_0}{K}$$

6.4 Limite de stabilité

1. Si on considère $K_C = 1$ alors le lieu de Black de la fonction de transfert fourni est celui de la fonction de transfert en boucle ouverte.

On sait que le lieu de transfert d'un système en limite de stabilité passe par le point critique. Dans le plan de Black, le point critique a comme coordonnées $(-180, 0)$.

Pour assurer la stabilité, on doit descendre le lieu de transfert d'au moins 7,5 dB.

On a donc comme valeur limite pour K_C

$$K_C = 10^{-\frac{7,5}{20}}$$

soit

$$K_C \approx 0,42$$

Le déplacement minimal du lieu de transfert permettant d'assurer la stabilité est représenté sur la figure 6.36.

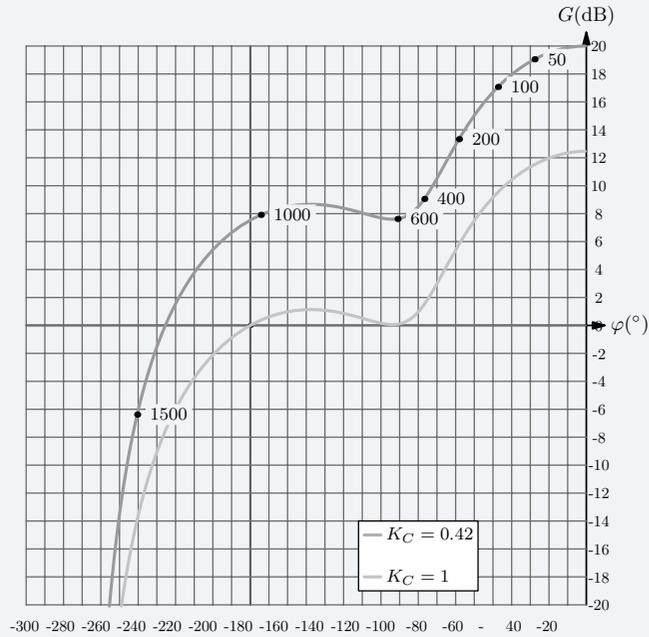


Figure 6.36 – Diagramme de Black

6.5 Marges de stabilité 1

1. La marge de gain notée M_G est définie par :

$$M_G = -G_{dB}(\omega_c) = -20 \log |B(j\omega_c)|$$

où ω_c représente la pulsation critique telle que

$$\varphi(\omega_c) = -180^\circ$$

Pour déterminer la marge de gain, on détermine d'abord ω_c .

À partir du schéma-bloc, on trouve la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$B(p) = \frac{7K_c}{2(1 + 150p)(1 + 0,5p)(1 + 40p)}$$

qui est un produit de trois systèmes d'ordre 1.

On a alors :

$$\varphi(\omega) = -\arctan(150\omega) - \arctan(0,5\omega) - \arctan(40\omega)$$

On cherche ω_c telle que :

$$-\arctan(150\omega_c) - \arctan(0,5\omega_c) - \arctan(40\omega_c) = -180^\circ$$

Par résolution numérique, on trouve :

$$\omega_c \approx 0,25 \text{ rad.s}^{-1}$$

Valeur qu'on peut vérifier sur le diagramme de Bode.

Connaissant ω_c , comme

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{7K_c}{2} \right) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (150\omega)^2} \times \sqrt{1 + (0,5\omega)^2} \times \sqrt{1 + (40\omega)^2} \right)$$

on trouve :

$$M_G \approx 20,8 \text{ dB}$$

La marge de phase notée M_φ est définie par :

$$M_\varphi = 180 + \varphi(\omega_{0dB}) = 180 + \arg(B(j\omega_{0dB}))$$

où ω_{0dB} est la pulsation de coupure à 0 dB telle que :

$$G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0 \text{ dB}$$

Pour déterminer M_φ on recherche d'abord ω_{0dB} .

À partir de l'expression du gain établie précédemment, on trouve :

$$\omega_{0dB} \approx 0,075 \text{ rad.s}^{-1}$$

Valeur en accord avec le diagramme de Bode proposé.

On trouve alors en utilisant l'expression de la phase

$$M_\varphi \approx 21,4^\circ$$

On constate que la marge de phase est insuffisante compte tenu des critères imposés par le cahier des charges.

2. Les valeurs trouvées pour la marge de phase et la marge de gain se vérifient aisément sur le diagramme de Bode fourni, voir figure 6.37.

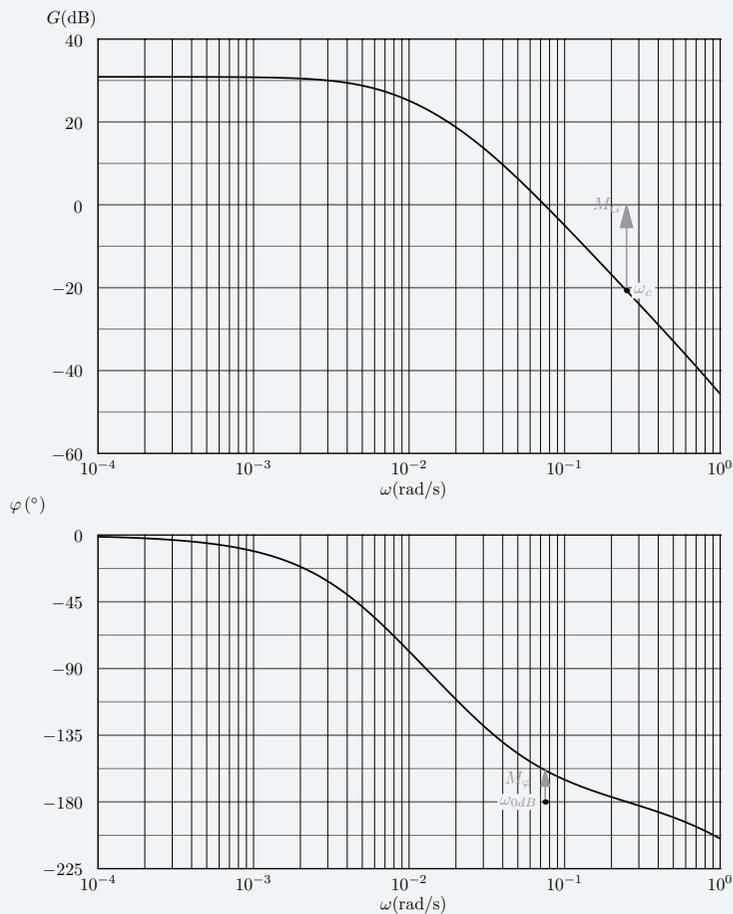


Figure 6.37 – Marge de phase et marge de gain

3. La marge de phase est insuffisante. Pour l'augmenter, il faut translater la courbe de gain sans modifier la phase. Pour cela, il suffit de modifier le gain K_c du correcteur.

On note : K'_c la nouvelle valeur du gain du correcteur telle que

$$K'_c = K K_c$$

On peut alors écrire : $B'(p) = K B(p)$.

On note φ' la phase et G'_{dB} le gain de la fonction de transfert $B'(p)$.

On veut :

$$\varphi'(\omega_{0dB}) = -135^\circ$$

Comme $\varphi' = \varphi$ alors on trouve

$$\omega_{0dB} \approx 0,035 \text{ rad.s}^{-1}$$

par ailleurs, il faut

$$G'_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$$

Comme $B'(p) = K B(p)$, on a

$$G'_{dB}(\omega) = 20 \log K + G_{dB}(\omega)$$

donc

$$G_{dB}(\omega_{0dB}) = -20 \log K$$

Par calcul ou en utilisant le diagramme de Bode fourni, on trouve

$$G_{dB}(\omega_{0dB}) \approx 11,6 \text{ dB}$$

On en déduit la valeur de K

$$K = 10^{-\frac{11,6}{20}}$$

La nouvelle valeur du gain du correcteur est donc : $K'_c \approx 2,6$. On vérifie bien que $K'_c < K_c$ ce qui correspond à une translation vers le bas de la courbe de gain.

On obtient alors le diagramme de Bode suivant :

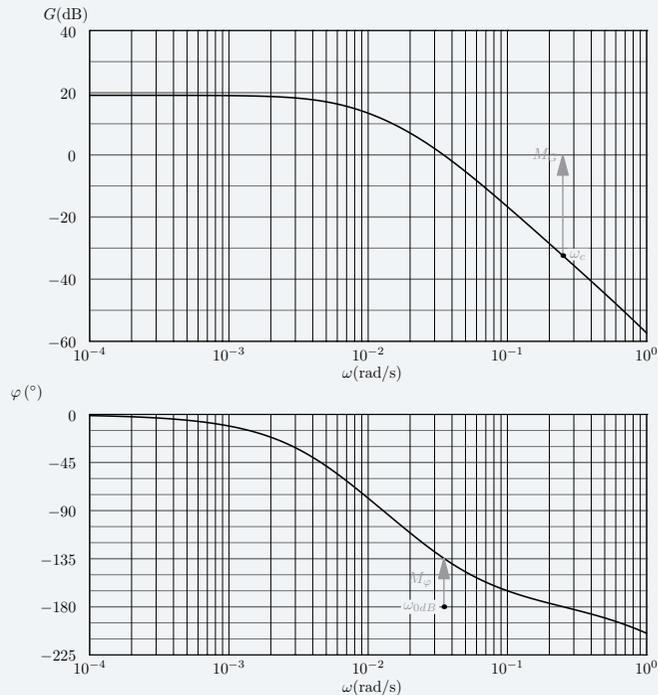


Figure 6.38 – Diagramme de Bode de $B(p)$ avec $K'_c = 2,6$

On peut vérifier que la marge de phase est bien de 45° . Quant à la marge de gain, elle a augmenté d'une valeur de $20 \log K$ pour atteindre une valeur d'environ 33 dB.

6.6 Marges de stabilité 2

1. On relève une marge de gain d'environ 20 dB et une marge de phase d'environ 12° .

Les valeurs trouvées pour la marge de phase et la marge de gain sont représentées sur la figure 6.39.

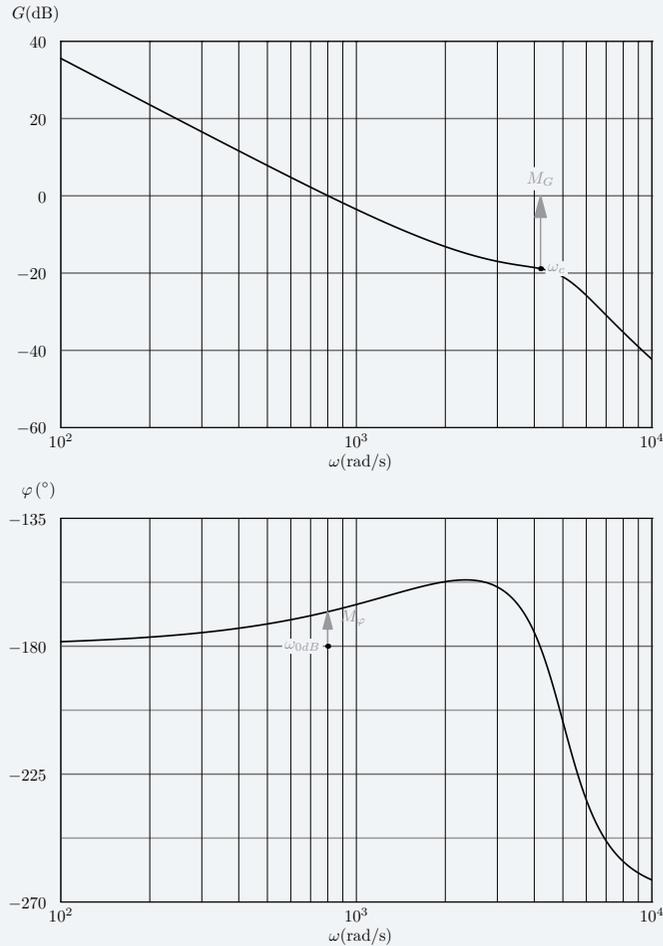


Figure 6.39 – Marge de phase et marge de gain

2. La marge de phase est insuffisante.

Comme la phase est toujours inférieure à -150° il n'est pas possible de régler une marge phase de 45° en modifiant uniquement le gain K_c .

En effet la modification de K_c n'entraîne pas de changement de phase donc il est impossible d'avoir $\varphi(\omega_{0dB}) = -135^\circ$.

Pour avoir une marge de phase satisfaisante, il faudrait pouvoir apporter, sur une bande de pulsation, une phase positive en modifiant le moins possible le gain. Ce type de correction est appelée correction à avance de phase.

6.7 Marges de stabilité 3

1. On relève une marge de gain inférieure à 3 dB et une marge de phase d'environ 80° .

Les valeurs trouvées pour la marge de phase et la marge de gain sont représentées sur la figure 6.40.

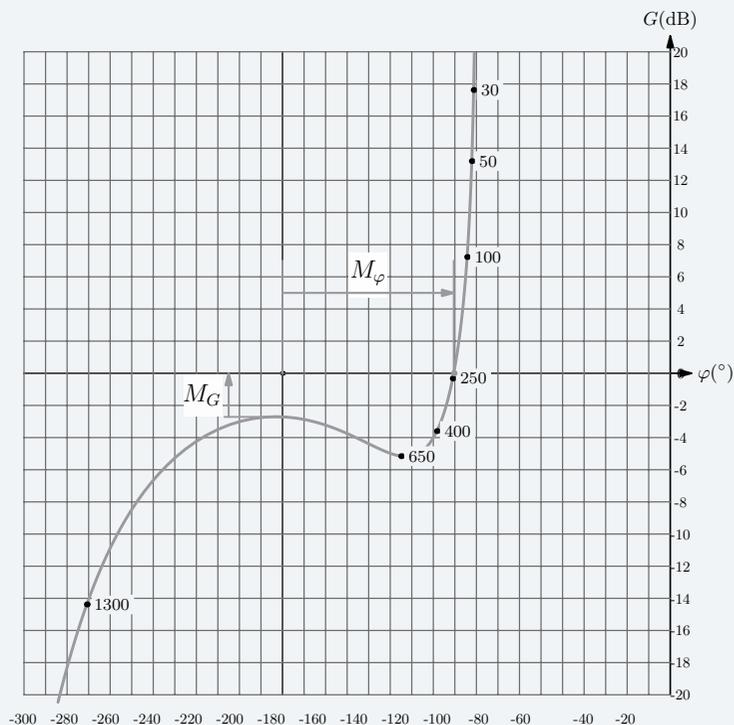


Figure 6.40 – Marge de phase M_φ et marge de gain M_G

2. La marge de gain est nettement trop petite, la marge de phase quant à elle est largement suffisante. Si on note

$$K'_C = a K_C$$

alors

$$B'(p) = aB(p)$$

Si on note G'_{dB} et φ' le gain et la phase de $B'(p)$ alors

$$G'_{dB}(\omega) = 20 \log a + G_{dB}(\omega) \quad \text{et} \quad \varphi'(\omega) = \varphi(\omega)$$

La modification de K_C n'entraîne qu'une variation du gain de la fonction de transfert.

Comme on veut une marge de phase d'au moins 12 dB, il faut donc descendre le lieu de transfert d'au moins 9,5 dB. Compte tenu de l'expression de G'_{dB} , on a

$$20 \log a < -9,5$$

On impose donc un gain du correcteur tel que

$$K'_C < 10^{\frac{-9,5}{20}} K_C$$

soit

$$K'_C < 3,35$$

Il reste à vérifier que la translation subie par le lieu de transfert pour obtenir une marge de gain satisfaisante n'a pas trop affecté la marge de phase.

Compte tenu de l'allure du lieu de transfert pour des pulsations inférieures à 250 rad.s⁻¹, la translation du lieu de transfert de -9 dB ne modifie pas sensiblement la marge de phase. La nouvelle marge de phase est de l'ordre de 85°.

Les marges de stabilité avec un gain K_C réglé à 3,55 sont représentées sur la figure 6.41.

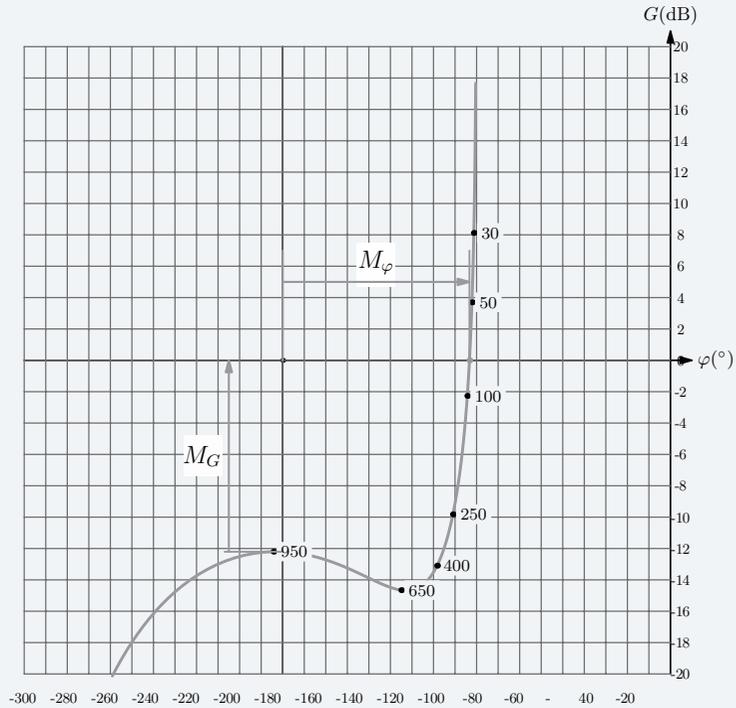


Figure 6.41 – Marge de phase et marge de gain pour $K_C = 3,35$

6.8 Marges de stabilité 4

1. On relève une marge de gain d'environ 4 dB et une marge de phase d'environ 50° .

Les valeurs trouvées pour la marge de phase et la marge de gain sont représentées sur la figure 6.42.

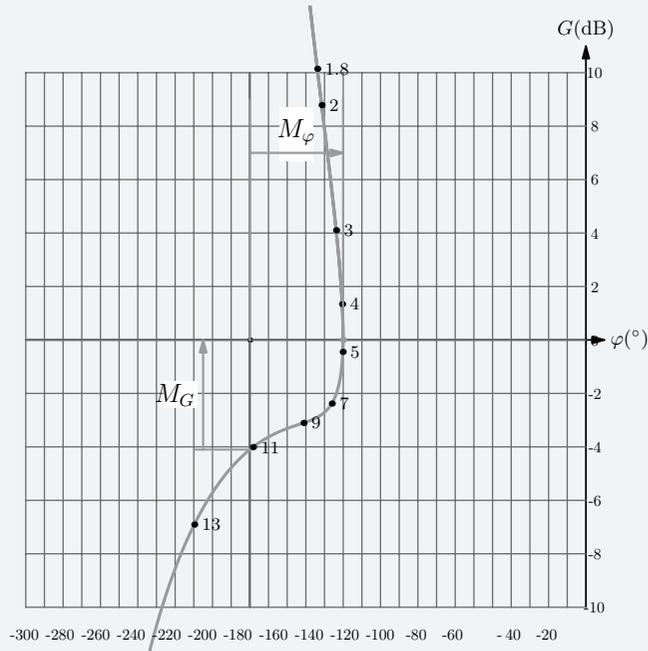


Figure 6.42 – Marge de phase M_{φ} et marge de gain M_G

2. Pour obtenir une marge de gain satisfaisante, il faut descendre le lieu de transfert de 10 dB. Il suffit alors de multiplier le gain K_C par

$$K = 10^{-\frac{10}{20}}$$

pour obtenir la marge de gain demandée.

En descendant le lieu de transfert de 10 dB, le point correspondant à la pulsation $\omega = 1,8 \text{ rad.s}^{-1}$ a alors les coordonnées suivantes $(-145; 0)$.

La marge de phase ne vaut donc plus que 35° comme le montre la figure 6.43.

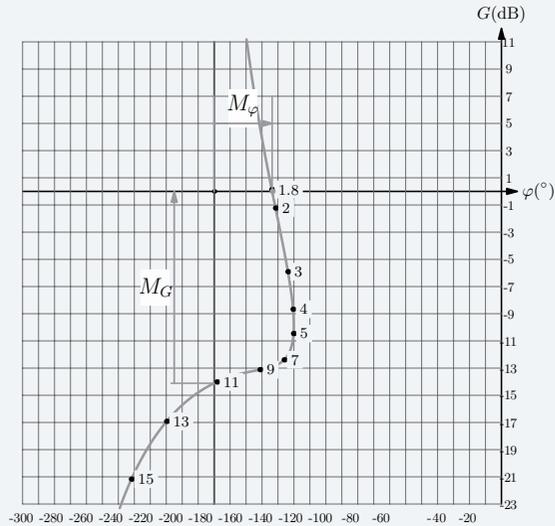


Figure 6.43 – Marge de phase et marge de gain avec le correcteur proportionnel réglé à $10^{-\frac{10}{20}} K_C$

La correction proportionnelle proposée ne permet pas le réglage des marges souhaitées. Pour avoir les marges désirées, il faut déformer localement le lieu de transfert en utilisant, par exemple, un correcteur à avance de phase. Le réglage de ce correcteur est fait de manière à apporter une phase positive pour des pulsations proches de 5 rad.s^{-1} comme le montre la figure 6.44.

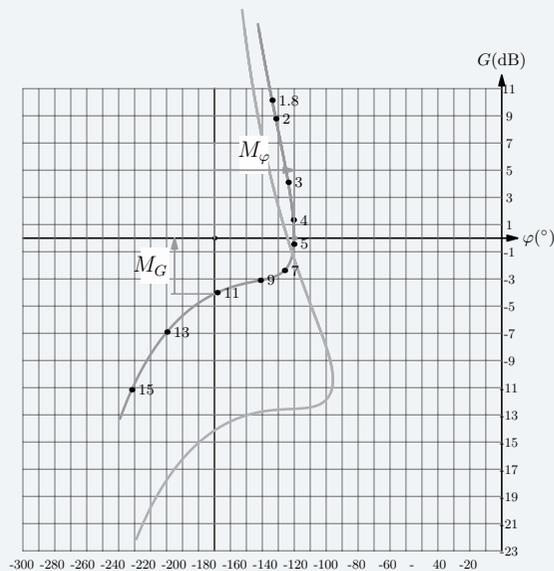


Figure 6.44 – Lieu de transfert avec et sans correcteur à avance de phase

6.9 Marge d'amplitude

1. On relève une marge de gain d'environ 4 dB et une marge de phase d'environ 15°.

Les valeurs trouvées pour la marge de phase et la marge de gain sont représentées sur la figure 6.45.

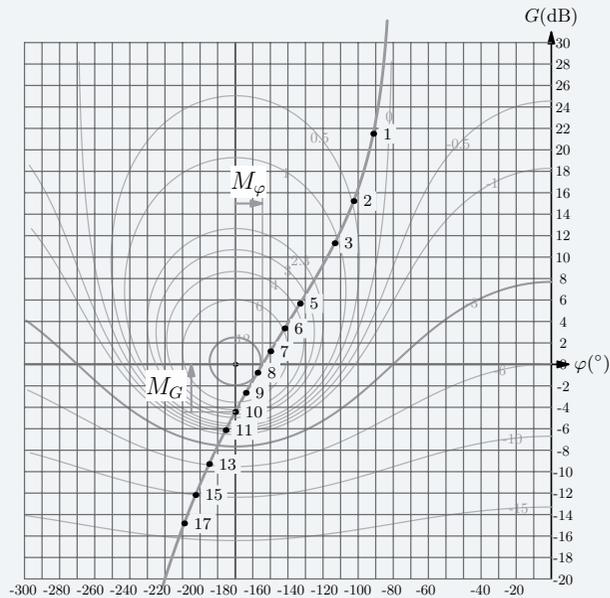


Figure 6.45 – Marge de phase M_φ et marge de gain M_G

2. La lecture des valeurs de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle fermée se fait sur les courbes isogains et isophases. Sur la figure 6.45, on voit que le lieu de transfert est tangent à la courbe isogains à 12 dB c'est-à-dire qu'aucun gain ne dépasse cette valeur de 12 dB en boucle fermée.

Comme la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1, le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée est 1, donc le gain en décibels est nul aux basses fréquences. Ce qu'on peut lire sur le diagramme de Black de la figure 6.45.

On conclut alors que la surtension est de 12 dB.

À la lecture du lieu de transfert de la figure 6.45, on constate que pour une pulsation voisine de 12 rad.s^{-1} le gain atteint -3 dB . Compte tenu du gain basses fréquences, la bande passante est d'environ :

$$\frac{12}{2\pi} \text{ Hz}$$

3. Un facteur de surtension de 1,3 correspond à une surtension de 2,3 dB.

Comme

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 0$$

alors pour que le facteur de surtension ne dépasse pas la valeur de 1,3, il faut que le lieu de transfert soit tangent au contour de Hall, c'est-à-dire tangent à la courbe isogains à 2,3 dB.

Pour cela, il faut descendre le lieu de transfert de 7 dB. Ce déplacement est obtenu en modifiant le gain du correcteur.

Si on note $K'_C = gK_C$ la nouvelle valeur du gain du correcteur proportionnel, alors

$$K'_C = 20 \log \left(-\frac{8}{20} \right) K_C \quad \text{soit} \quad K'_C \approx 0,4$$

Le lieu de Black corrigé est présenté sur la figure 6.46. On constate que le lieu de transfert est bien tangent au contour de Hall, le gain de la fonction de transfert en boucle fermée ne dépasse donc pas 2,3 dB.

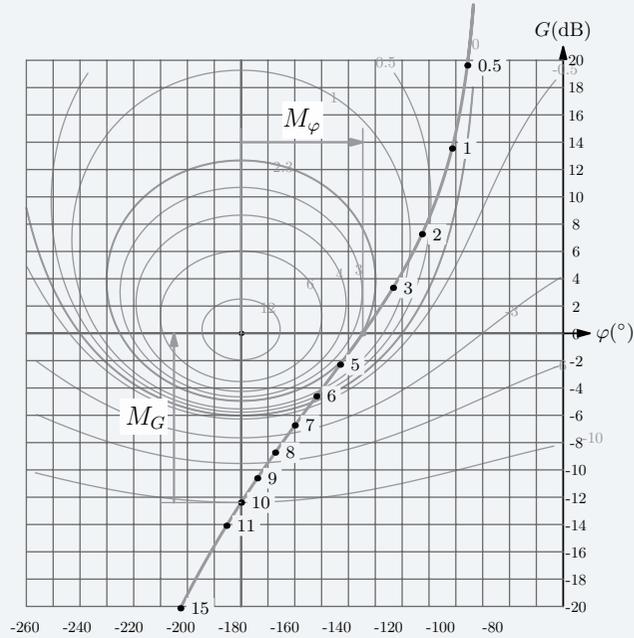


Figure 6.46 – Diagramme de Black avec le correcteur proportionnel réglé à 0,4

4. On relève sur la figure 6.46 une marge de gain d'environ 12 dB et une marge de phase de 45°. Ces valeurs sont proches des valeurs classiquement adoptées pour ces marges de stabilité.
5. Comme le gain de boucle a été diminué, le système est plus lent, on doit donc trouver une bande passante plus petite. On voit sur la figure 6.46 que le gain de -3 dB en boucle fermée est atteint pour une pulsation légèrement supérieure à 7 rad.s⁻¹. Comparé au résultat trouvé avant correction, on a une diminution de la bande passante de l'ordre de 40 %.

6.10 Commande en position d'une gouverne d'Airbus

1. Pour trouver $G(p)$ et $W(p)$, on peut :

- rechercher l'expression de $X(p)$ en fonction de $Q(p)$ et $F_A(p)$ à partir du schéma proposé et l'identifier à

$$X(p) = G(p) (Q(p) - W(p)F_A(p))$$

expression calculée à partir du schéma équivalent proposé

ou

- transformer le schéma proposé pour obtenir la configuration du schéma équivalent.

Méthode 1

On cherche la fonction de transfert en poursuite $\frac{X(p)}{Q(p)}$ en supposant la perturbation nulle. On obtient alors

$$\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(mV_0p^2 + \mu V_0p + 2BS^2)}$$

Puis on détermine la fonction de transfert en régulation $\frac{X(p)}{F_A(p)}$ en supposant la consigne nulle. On trouve

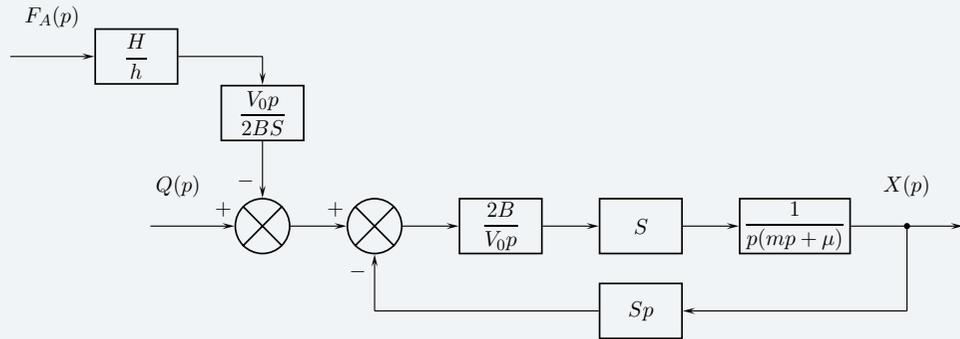
$$\frac{X(p)}{F_A(p)} = \frac{H}{h} \frac{V_0p}{p(mV_0p^2 + \mu V_0p + 2BS^2)}$$

On propose alors

$$G(p) = \frac{2BS}{p(mV_0p^2 + \mu V_0p + 2BS^2)} \quad \text{et} \quad W(p) = \frac{HV_0p}{2BS^2h}$$

Méthode 2

On déplace le sommateur et on trace le schéma suivant :



On lit directement

$$W(p) = \frac{H}{h} \times \frac{V_0 p}{2BS} \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{2BS}{V_0 p^2 (mp + \mu) + 2BS^2 p}$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$W(p) = \frac{HV_0 p}{2BS h} \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{1}{Sp \left(1 + \frac{\mu V_0}{2BS^2} p + \frac{mV_0}{2BS^2} p^2 \right)}$$

2. Si la perturbation est en échelon et si la consigne est nulle alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Si on suppose le système stable alors x tend vers une valeur finie, on peut utiliser le théorème de la valeur finale.

Pour montrer qu'une perturbation en échelon est sans effet en régime permanent, il suffit de montrer

$$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p) = 0$$

À partir du schéma-bloc, si la consigne est nulle, on trouve

$$X(p) = W(p) \times \frac{G(p)}{1 + CKK_M G(p)} \times F_A(p) \quad \text{avec} \quad F_A(p) = \frac{F_0}{p}$$

On a donc

$$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p) = \lim_{p \rightarrow 0} F_0 \times \frac{HV_0 p}{2BS h} \times \frac{CKK_M}{CKK_M + Sp \left(1 + \frac{\mu V_0}{2BS^2} p + \frac{mV_0}{2BS^2} p^2 \right)}$$

On conclut immédiatement : $\lim_{p \rightarrow 0} pX(p) = 0$. L'effet de la perturbation est annihilé en régime permanent.

3. Pour répondre sur la précision, il faut rechercher l'expression de l'erreur en régime permanent

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_c(t) - x(t))$$

Si cette limite existe alors, en utilisant le théorème de la valeur finale, on a :

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_C(p) - X(p))$$

ou encore

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} pX_C(p) \left(1 - \frac{X(p)}{X_C(p)} \right)$$

Comme le système est à retour unitaire, on sait que

$$\frac{X(p)}{X_C(p)} = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)}$$

où $BO(p)$ représente la fonction de transfert en boucle ouverte.

On peut alors écrire

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p X_C(p) \left(\frac{1}{1 + BO(p)} \right) \quad \text{avec} \quad BO(p) = CKK_M G(p)$$

On établit alors l'expression de l'erreur en régime permanent :

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p X_C(p) \frac{Sp \left(1 + \frac{\mu V_0}{2BS^2} p + \frac{mV_0}{2BS^2} p^2 \right)}{Sp \left(1 + \frac{\mu V_0}{2BS^2} p + \frac{mV_0}{2BS^2} p^2 \right) + CKK_M}$$

Si la consigne est un échelon

$$X_C(p) = \frac{X_0}{p}$$

alors

$$e_\infty = 0 \quad - \quad \text{le cahier des charges est donc respecté}$$

Pour la consigne en rampe, on a

$$X_C(p) = \frac{0,1}{p^2}$$

On obtient donc

$$e_\infty = \frac{0,1S}{CKK_M}$$

On veut

$$e_\infty \leq 2 \cdot 10^{-3}$$

alors

$$\frac{0,1S}{CKK_M} \leq 2 \cdot 10^{-3}$$

On a écrit précédemment

$$BO(p) = CKK_M G(p)$$

Le gain de boucle a donc pour expression

$$K_{BO} = \frac{CKK_M}{S}$$

En conclusion, pour respecter les critères imposés par le cahier des charges, il faut

$$K_{BO} \geq 50$$

De ce gain de boucle, on déduit aisément la valeur minimale du gain du correcteur proportionnel

$$C \geq \frac{50S}{KK_M}$$

6.11 Asservissement de vitesse

1. En régime permanent, la vitesse de rotation du moteur est de 8 rad.s^{-1} . Comme on a une consigne de 10 rad.s^{-1} alors l'erreur est donc de 2 rad.s^{-1} . Il y a donc une erreur de 20 %.

2. L'erreur en régime permanent est définie par

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_{ref}(t) - \omega(t))$$

Comme cette erreur est finie, en utilisant le théorème de la valeur finale, on obtient

$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p (\Omega_{ref}(p) - \Omega(p))$$

Ce qu'on écrit encore

$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_{ref}(p) \left(1 - \frac{\Omega(p)}{\Omega_{ref}(p)} \right)$$

Comme on a un système à retour unitaire alors

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)}$$

Par ailleurs, la consigne est un échelon d'amplitude 10 donc

$$\Omega_{ref}(p) = \frac{10}{p}$$

Donc

$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} 10 \frac{1}{1 + BO(p)}$$

Comme l'erreur est finie $\lim_{p \rightarrow 0} BO(p)$ est finie.

On peut conclure que $BO(p)$ est de classe 0 et s'écrit

$$BO(p) = \frac{K_{BO}(1 + n_1 p + \dots)}{1 + d_1 p + \dots}$$

On a alors

$$e_{\infty} = \frac{10}{1 + K_{BO}}$$

Comme l'erreur est de 2 rad.s^{-1} , on trouve

$$\frac{1}{1 + K_{BO}} = 0,2 \quad \text{soit} \quad K_{BO} = 4$$

3. On a établi

$$e_{\infty} = \frac{10}{1 + K_{BO}}$$

pour une entrée en échelon d'amplitude 10 rad.s^{-1} . On souhaite une erreur inférieure à 1 %. On note le nouveau gain de boucle K'_{BO} , on doit donc avoir

$$\frac{1}{1 + K'_{BO}} \leq 0,01 \quad \text{d'où} \quad K'_{BO} \geq 99$$

Le gain de boucle doit donc passer de 4 à 99, pour cela il faut que le gain du correcteur soit multiplié par $\frac{99}{4}$.

Cette nouvelle valeur pour le gain du correcteur peut poser deux types de problèmes :

- Problème de sécurité et de transport d'énergie : une valeur importante du gain du correcteur va générer une tension élevée. Ici, lorsque l'écart est maximal, avec une valeur de gain de $\frac{99}{4}$, la tension en sortie d'amplificateur atteint 594 Volts. Tension délicate à transporter et sans doute supérieure à la tension admissible par le moteur.

- Problème de rapidité et de stabilité :

À partir du schéma-bloc, on trouve :

$$BO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On a alors

$$BF(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \times \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0(1 + K_{BO})}p + \frac{p^2}{\omega_0^2(1 + K_{BO})}}$$

Par ailleurs, on note

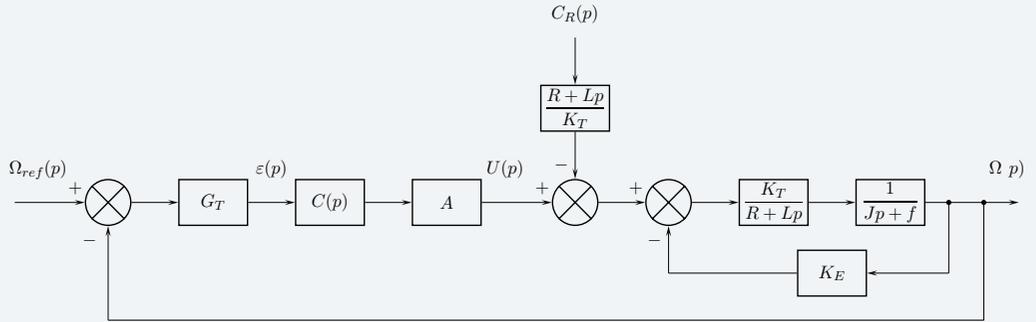
$$BF(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_f}{\omega_{0f}}p + \frac{p^2}{\omega_{0f}^2}}$$

En identifiant, on trouve

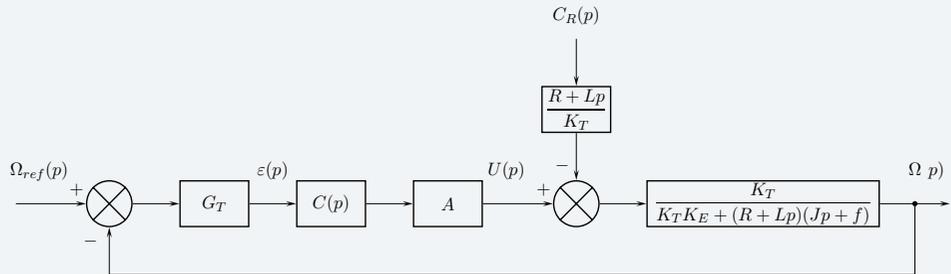
$$\omega_{0f} = \omega_0 \sqrt{1 + K_{BO}} \quad \text{et} \quad \xi_f = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$$

Si on augmente le gain du correcteur, K_{BO} augmente. Donc le coefficient d'amortissement en boucle fermée diminue, générant plus d'oscillations. Le système est donc moins stable et le temps de réponse plus grand.

4. Pour étudier l'influence de la perturbation, on travaille sur le schéma équivalent ci-dessous :



ou encore :



On peut alors écrire

$$\Omega(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} \Omega_{ref}(p) - \frac{R + Lp}{K_T} \times \frac{BO(p)}{G_T C(p) A (1 + BO(p))} F_R(p)$$

Si la consigne et la perturbation sont en échelon d'amplitudes respectives Ω_{R0} et F_{R0} , on a en régime permanent

$$\omega_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{BO(p)}{1 + BO(p)} \Omega_{R0} - \frac{R + Lp}{K_T} \times \frac{BO(p)}{G_T C(p) A (1 + BO(p))} F_{R0} \right)$$

$BO(p)$ est de classe 0. Le correcteur est proportionnel, $C(p) = K$.

On a donc

$$\omega_\infty = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \Omega_{R0} - \frac{R K_{BO}}{K_T G_T K A (1 + K_{BO})} F_{R0}$$

L'effet de la perturbation n'est pas repris en régime permanent.

5. L'amélioration de la précision doit être apportée en régulation et en poursuite.

- Étude en poursuite : pour avoir une précision absolue, il faut avoir

$$\omega_\infty = \Omega_{R0}$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} = 1$$

Il faut alors que la classe de $BO(p)$ soit au moins égale à 1.

- Étude en régulation : pour que la perturbation soit reprise il faut que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{R + Lp}{K_T} \times \frac{BO(p)}{G_T C(p) A (1 + BO(p))} = 0$$

Ce qui conduit à avoir $C(p)$ de classe supérieure ou égale à 1 c'est à dire avoir au moins une intégration dans le correcteur.

En conclusion, si le correcteur possède au moins une intégration la précision sera absolue pour des entrées de consigne et de perturbation en échelon.

6.12 Axe de robot

1. Pour trouver $B(p)$, il faut dans un premier temps réduire la boucle interne. On obtient le schéma de la figure 6.47.

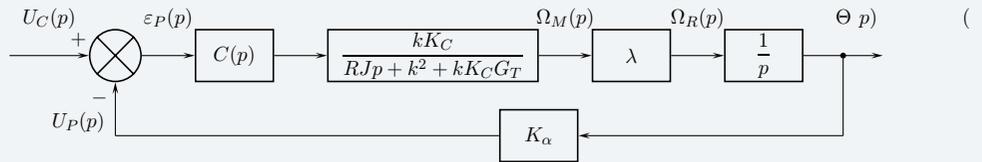


Figure 6.47 – Schéma-bloc réduit

À partir du schéma réduit, on trouve l'expression de $B(p)$

$$B(p) = \frac{k K_C K_\alpha \lambda C(p)}{p(RJp + k^2 + k K_C G_T)}$$

ou encore

$$B(p) = \frac{\frac{k K_C K_\alpha \lambda C(p)}{k^2 + k K_C G_T}}{p \left(1 + \frac{RJ}{k^2 + k K_C G_T} p \right)}$$

2. Comme le correcteur est proportionnel, on note $C(p) = C$. On a alors :

$$B(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau p)}$$

avec

$$K_{BO} = \frac{k K_C K_\alpha \lambda C}{k^2 + k K_C G_T} \quad \tau = \frac{RJ}{k^2 + k K_C G_T}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1. Cela permet d'affirmer qu'en régime permanent, l'écart en position est nul et pour une entrée en rampe de pente a , l'écart de traînage est

$$\frac{a}{K_{BO}}$$

On peut retrouver ces résultats à partir de l'étude, en régime permanent, de l'écart en position défini par :

$$\varepsilon_{P\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u_c(t) - u_P(t))$$

Comme la limite existe, le théorème de la valeur finale permet d'écrire

$$\varepsilon_{P\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p(U_C(p) - U_P(p))$$

ou encore

$$\varepsilon_{P\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p U_C(p) \left(1 - \frac{U_P(p)}{U_C(p)} \right).$$

Comme la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 alors la fonction de transfert en boucle fermée est de gain statique 1, ce que montre le calcul suivant :

$$\frac{U_P(p)}{U_C(p)} = \frac{K_{BO}}{K_{BO} + p(1 + \tau p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{BO}}(1 + \tau p)}$$

Si l'entrée est un échelon unitaire alors :

$$U_C(p) = \frac{1}{p}$$

On a donc bien : $\varepsilon_{P\infty} = 0$.

Par ailleurs, si l'entrée est une rampe de pente a alors :

$$U_C(p) = \frac{a}{p^2}$$

On a alors :

$$\varepsilon_{V\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \frac{\frac{p}{K_{BO}}(1 + \tau p)}{1 + \frac{p}{K_{BO}}(1 + \tau p)}$$

On retrouve bien :

$$\varepsilon_{V\infty} = \frac{a}{K_{BO}}.$$

La performance pour l'écart en position est vérifiée. Pour l'écart de traînage, il faut que

$$\frac{1}{K_{BO}} < 0,01$$

Pour assurer la performance pour l'écart de traînage il faut donc

$$C > \frac{k^2 + kK_C G_T}{0,01 k K_C K_\alpha \lambda}$$

Le correcteur proportionnel permet de satisfaire les exigences de précision.

6.13 Restituteur d'effort

1. La fonction de transfert en poursuite s'obtient en supposant $F_P(p) = 0$. On a alors :

$$G(p) = \frac{\Delta F(p)}{\Delta F_c(p)} = \frac{C(p)H_1(p)}{1 + C(p)H_1(p)}$$

2. On cherche l'erreur en régime permanent, soit

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Delta f_c(t) - \Delta f(t))$$

Le système étudié étant supposé stable e_∞ existe. En utilisant le théorème de la valeur finale, on a

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p(\Delta F_C(p) - \Delta F(p))$$

On peut alors écrire

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta F_C(p) \left(1 - \frac{\Delta F(p)}{\Delta F_C(p)} \right)$$

ou encore

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta F_C(p) (1 - G(p))$$

Compte tenu de l'expression de $G(p)$, on a alors

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta F_C(p) \left(\frac{1}{C(p)H_1(p)} \right)$$

Comme on cherche cette erreur pour une entrée en échelon alors

$$\Delta F_C(p) = \frac{\Delta F_0}{p}$$

L'erreur devient donc

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F_0}{C(p)H_1(p)} \right)$$

On note

$$C(p) = K \frac{1 + n_1 p + \dots + n_k p^k}{p^\alpha (1 + d_1 p + \dots + d_j p^j)}$$

la fonction de transfert du correcteur.

Le calcul de l'erreur est équivalent alors à

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F_0 p^\alpha}{K K_1} \right)$$

On conclut alors que l'erreur ne peut être nulle que si $\alpha \geq 1$. Le correcteur doit donc être au moins de classe 1.

3. $R(p) = \frac{\Delta F(p)}{F_p(p)}$ en supposant la consigne nulle. On obtient alors

$$R(p) = \frac{H_2(p)}{1 + C(p)H_1(p)}$$

4. L'exigence du cahier des charges relative à la perturbation peut se traduire par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta f(t) < 0,1 \times F_0$$

si on suppose la consigne nulle ou si l'erreur due à la consigne est nulle.

Si on suppose que cette limite existe alors, en utilisant le théorème de la valeur finale, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \Delta F(p) < 0,1 \times F_0$$

La perturbation est une rampe de pente F_0 d'où $F_p(p) = \frac{F_0}{p^2}$. Si on suppose la consigne nulle alors

$$\Delta F(p) = \frac{H_2(p)}{1 + C(p)H_1(p)} \times \frac{F_0}{p^2}$$

Soit

$$\Delta F(p) = \frac{K_2}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3} \times \frac{p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)}{p^\alpha (1 + a_1 p + \dots)(1 + d_1 p + \dots) + K K_1} \times \frac{F_0}{p^2}$$

Le calcul de la limite précédente est équivalent à

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2 F_0 p^{\alpha-1}}{K K_1} < 0,1 \times F_0$$

α doit au moins être égal à 1 pour que la limite soit finie.

Si $\alpha = 1$ alors le gain statique K du correcteur doit vérifier

$$K > \frac{10 K_2}{K_1}$$

Si $\alpha > 1$ alors le gain du correcteur peut être quelconque.

6.14 Dérouleuse

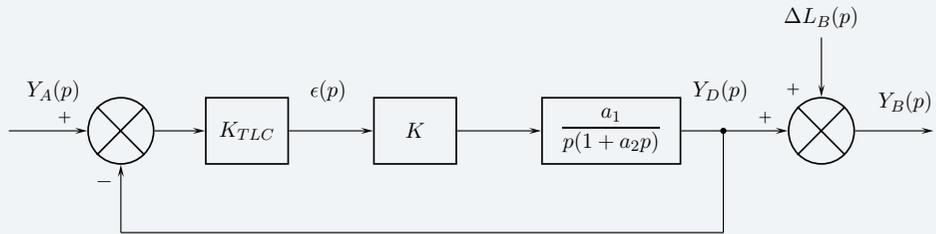
1. Le potentiomètre permet de transformer la consigne y_A en tension afin de pouvoir réaliser la comparaison avec la mesure de position qui est elle-même une tension.

$M(p) = K_{TLC}$ car il faut que l'écart soit nul lorsque la sortie y_B est égale à la consigne y_A .

2. Après avoir remarqué que

$$\epsilon(p) = K_{TLC}(Y_A(p) - Y_D(p))$$

on trace le schéma suivant :



3. Par définition, la fonction de transfert en boucle ouverte est

$$BO(p) = \frac{R(p)}{\epsilon(p)}$$

Par lecture du schéma, on trouve

$$BO(p) = \frac{a_1 K K_{TLC}}{p(1 + a_2 p)}$$

qui est de classe 1.

4. On cherche

$$W(p) = \frac{Y_B(p)}{Y_A(p)} \quad \text{avec} \quad \Delta L_B(p) = 0$$

Comme le schéma est à retour unitaire, on a

$$W(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)}$$

Donc

$$W(p) = \frac{a_1 K K_{TLC}}{a_1 K K_{TLC} + p(1 + a_2 p)}$$

Ou encore

$$W(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{a_1 K K_{TLC}} + \frac{a_2}{a_1 K K_{TLC}} p^2}$$

On cherche maintenant

$$Z(p) = \frac{Y_B(p)}{\Delta L_B(p)} \quad \text{avec} \quad Y_A(p) = 0$$

On a immédiatement $Z(p) = 1$

5. Par superposition, on peut écrire

$$Y_B(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{a_1 K K_{TLC}} + \frac{a_2}{a_1 K K_{TLC}} p^2} Y_A(p) + \Delta L_B(p)$$

À partir de cette expression ou directement sur le schéma, on voit que le défaut de largeur n'est pas pris en compte par l'asservissement. On peut remarquer qu'en l'absence de défaut de largeur, comme le gain statique de $W(p)$ vaut 1, la sortie y_B sera égale à l'entrée y_A en régime permanent.

6. Comme les cellules EVK mesurent la variation temporelle de largeur, cela revient à dire qu'elles relèvent une vitesse de déplacement. Il faut donc faire apparaître sur le schéma cette vitesse, notée $V_B(p)$. Or compte tenu de la relation entre vitesse et position, on peut écrire

$$V_B(p) = p Y_B(p)$$

7. Sur la figure 6.20 à la page 218, on lit

$$\frac{Y_D(p)}{U_C(p)} = \frac{a}{1 + bp + cp^2}$$

À partir de la figure 6.19, on trouve en utilisant les propriétés d'algèbre des schémas

$$\frac{Y_D(p)}{U_C(p)} = \frac{a_1 K}{a_1 K K_{TLC} + p(1 + a_2 p)}$$

ou encore

$$\frac{Y_D(p)}{U_C(p)} = \frac{1}{K_{TLC} \left(1 + \frac{p}{a_1 K K_{TLC}} + \frac{a_2}{a_1 K K_{TLC}} p^2 \right)}$$

Par identification, il vient donc

$$a = \frac{1}{K_{TLC}} \quad b = \frac{p}{a_1 K K_{TLC}} \quad c = \frac{a_2}{a_1 K K_{TLC}}$$

8. On calcule tout d'abord la fonction de transfert du correcteur, $C(p)$. Par lecture du schéma, on trouve

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_d p} \right)$$

soit

$$C(p) = K_c \frac{1 + T_d p}{T_d p}$$

La fonction de transfert en poursuite, $M(p)$, se détermine lorsque la perturbation est nulle. On a

$$M(p) = \frac{Y_B(p)}{Y_A(p)} = p K_{EVK} \frac{K_c \frac{1 + T_d p}{T_d p} \frac{a}{1 + bp + cp^2}}{1 + p K_{EVK} K_c \frac{1 + T_d p}{T_d p} \frac{a}{1 + bp + cp^2}}$$

Soit après réduction et arrangement

$$M(p) = \frac{aK_{EVK}K_c(1 + T_d p)}{T_d + aK_{EVK}K_c + T_d(aK_{EVK}K_c + b)p + T_d c p^2}$$

La fonction de transfert en régulation, $N(p)$, se calcule pour une consigne nulle. On trouve alors

$$N(p) = \frac{1}{1 + pK_{EVK}K_c \frac{1 + T_d p}{T_d p} \frac{a}{1 + bp + cp^2}}$$

Soit après réduction et arrangement

$$N(p) = \frac{T_d(1 + bp + cp^2)}{T_d + aK_{EVK}K_c + T_d(aK_{EVK}K_c + b)p + T_d c p^2}$$

9. La précision se quantifie avec l'erreur en régime permanent, notée e_∞ . Pour calculer, il est plus aisé ici de rechercher d'abord l'expression de la sortie en régime permanent, notée $y_{B\infty}$ puis de la comparer à la consigne y_A .

Comme le système est stable, la réponse indicielle tend vers une valeur finie donc on peut écrire, en utilisant le théorème de la valeur finale

$$y_{B\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y_B(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY_B(p)$$

Comme la consigne est un échelon d'amplitude Y_0 et la perturbation un échelon d'amplitude ΔL_0 alors

$$Y_B(p) = \frac{\left(aK_{EVK}K_c(1 + T_d p) \frac{Y_0}{p} + T_d(1 + bp + cp^2) \frac{\Delta L_0}{p} \right)}{T_d + aK_{EVK}K_c + T_d(aK_{EVK}K_c + b)p + T_d c p^2}$$

Finalement

$$y_{B\infty} = \frac{aK_{EVK}K_c Y_0 + T_d \Delta L_0}{T_d + aK_{EVK}K_c}$$

En conclusion, on a : $e_\infty = \frac{T_d(-Y_0 + \Delta L_0)}{T_d + aK_{EVK}K_c}$.

Il y aura donc toujours une erreur qu'il y ait ou non perturbation.

6.15 Correcteur à avance de phase

2. On peut écrire $C(p)$ sous la forme suivante

$$C(p) = \frac{K}{1 + Tp} \times (1 + aTp)$$

On a alors par définition du gain et de la phase :

- $G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\omega T)^2} \right) + 20 \log \left(\sqrt{1 + (a\omega T)^2} \right)$
- $\varphi(\omega) = \arctan(a\omega T) - \arctan(\omega T)$.

3. Le diagramme de Bode asymptotique est obtenu par superposition (voir diagrammes page suivante).

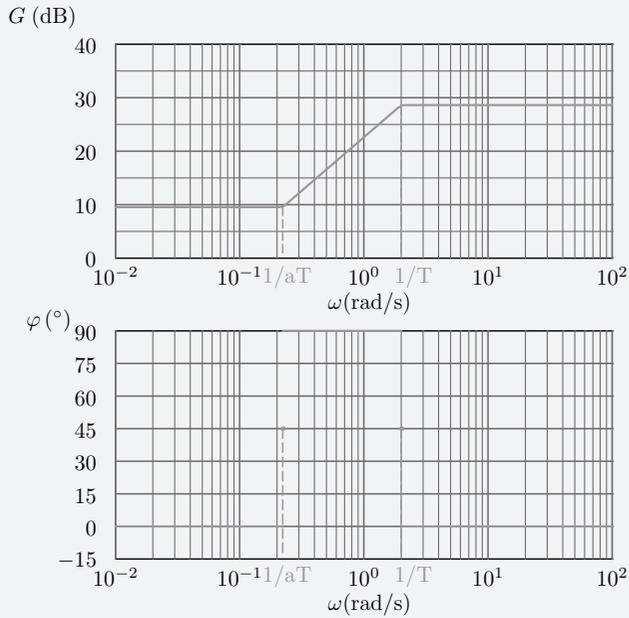
4. Pour déterminer l'extremum de φ , on étudie sa dérivée.

On a

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1 + (a\omega T)^2} - \frac{1}{1 + (\omega T)^2}$$

Cette dérivée s'annule pour

$$\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$



On atteint donc le maximum de la phase pour $\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ qui est le milieu géométrique du segment $\left[\frac{1}{aT} \frac{1}{T} \right]$ sur une échelle logarithmique.

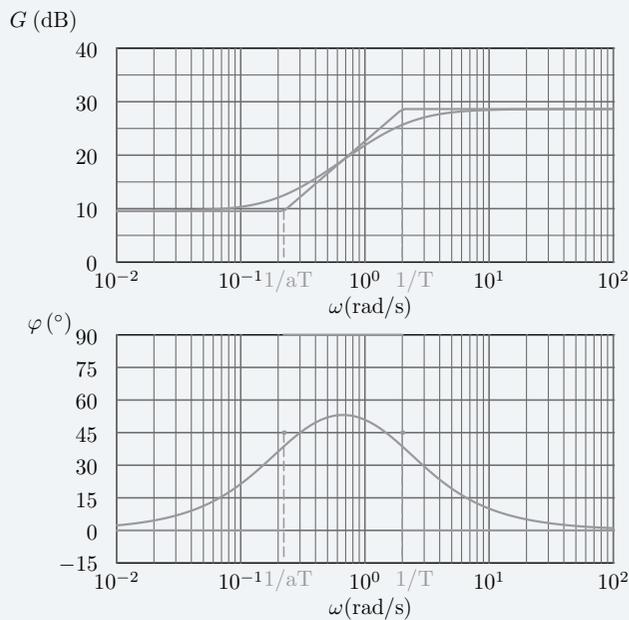
5. Le maximum de phase est atteint pour $\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ d'où

$$\varphi_{max} = \arctan(\sqrt{a}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Soit

$$\sin(\varphi_{max}) = \frac{a-1}{a+1}$$

6. On peut tracer le diagramme réel



7. Comme ce correcteur apporte une phase positive, il peut être utilisé pour améliorer la stabilité par augmentation de la marge de phase. Le maximum d'avance de phase est à apporter pour la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé.

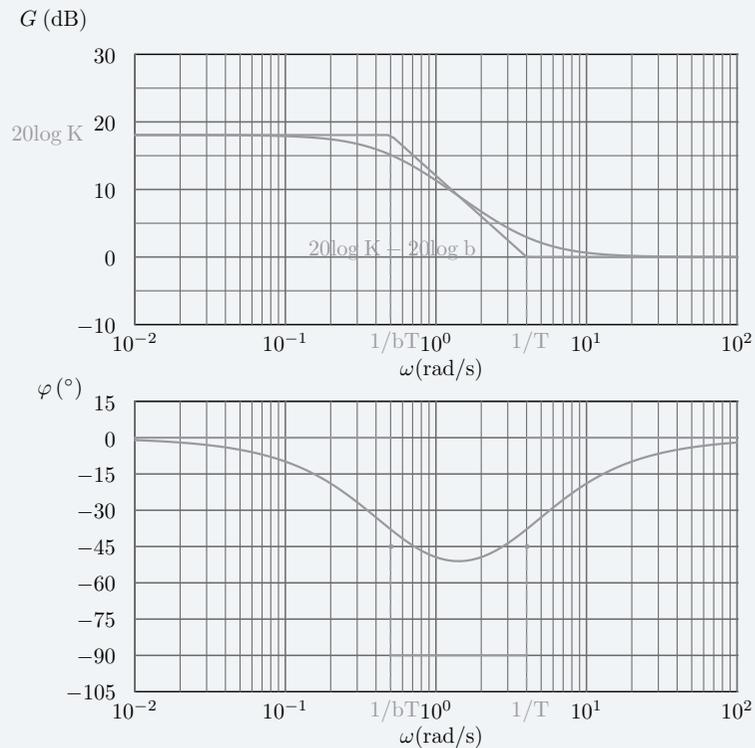
Par ailleurs, ce correcteur augmente le gain en hautes fréquences. La bande passante est alors plus grande, donc le système est plus rapide.

Compte tenu de son gain en basses fréquences, ce correcteur diminue la précision.

Par ailleurs, on a des risques d'amplification des bruits de fond liée à l'augmentation du gain.

6.16 Correcteur à retard de phase

1. La fonction de transfert d'un correcteur à retard de phase peut s'obtenir en prenant $a < 1$ dans l'expression du gain et de la phase du correcteur à avance de phase étudié précédemment. On peut conclure alors que le diagramme de Bode du correcteur à retard de phase aura une allure symétrique à celui du correcteur à avance de phase. On obtient le tracé suivant :



2. Si $K = b$ alors lorsque $\omega \gg \frac{1}{T}$ on a $G_{dB}(\omega) \approx 0$ dB. Cela permet donc de ne pas modifier le gain de boucle en hautes pulsations.

3. Comme ce correcteur augmente le gain de boucle aux basses pulsations, il améliore la précision mais ne permet pas d'atteindre la précision absolue puisqu'il ne modifie pas la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

On suppose que T a été choisi correctement. C'est à dire que la pulsation $\omega = \frac{1}{T}$ est petite devant la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé.

Alors, si $K > b$ on a une dégradation de la stabilité puisque le gain du correcteur est strictement positif sur toute la bande de pulsations, par contre si $K = b$, comme dans l'exemple traité, ce correcteur ne modifie pas la stabilité.

L'influence sur la rapidité dépend également de la valeur de K . Si $K > b$, la rapidité est améliorée car on a une augmentation de la pulsation de coupure à 0 dB, par contre si $K = b$, on diminue la rapidité du système.

6.17 Filtre réjecteur

1. Pour tracer les diagrammes de Bode, on procède par superposition. On peut écrire

$$C(p) = C_1(p)C_2(p)$$

avec

$$C_1(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi_D}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad C_2(p) = 1 + \frac{2\xi_N}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

Les diagrammes asymptotiques de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 2 sont connus. Les diagrammes de $C_2(p)$ se déduisent de ceux de C_1 en utilisant les propriétés du logarithme et de l'argument des complexes, voir figure 6.48.

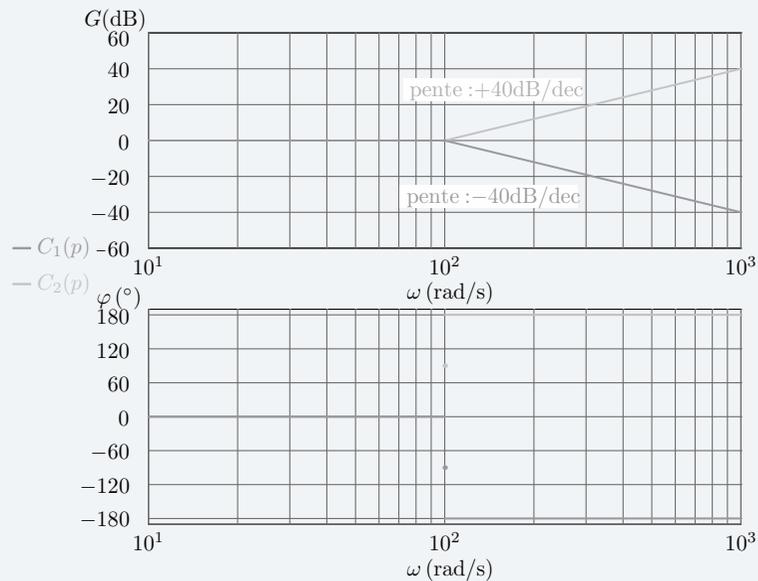


Figure 6.48 – Diagrammes asymptotiques de Bode

On voit immédiatement que les diagrammes asymptotiques de $C(p)$ fourniraient très peu d'informations, si ce n'est sur le comportement en hautes et basses pulsations.

Il faut donc rechercher les valeurs du gain et de la phase pour

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi_D^2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi_N^2}$$

Pour le gain, on a

$$G_{1dB}(\omega) = 20 \log(K\omega_0^2) - 20 \log \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_D\omega\omega_0)^2}$$

et

$$G_{2dB}(\omega) = 20 \log \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_N\omega\omega_0)^2} - 20 \log(\omega_0^2)$$

Comme les pulsations ω_2 et ω_R sont plus petites que la pulsation ω_0 alors on utilise pour calculer les phases

$$\varphi_1(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi_D\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_2(\omega) = \arctan\left(\frac{2\xi_N\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

On obtient alors en prenant $K = 1$

$$G_{1dB}(\omega_R) \approx 8,1 \text{ dB} \quad G_{2dB}(\omega_2) \approx -24,4 \text{ dB} \quad \varphi_1(\omega_R) \approx -78,2^\circ \quad \varphi_2(\omega_2) \approx 88^\circ$$

On trace alors les diagrammes de Bode de la figure 6.49

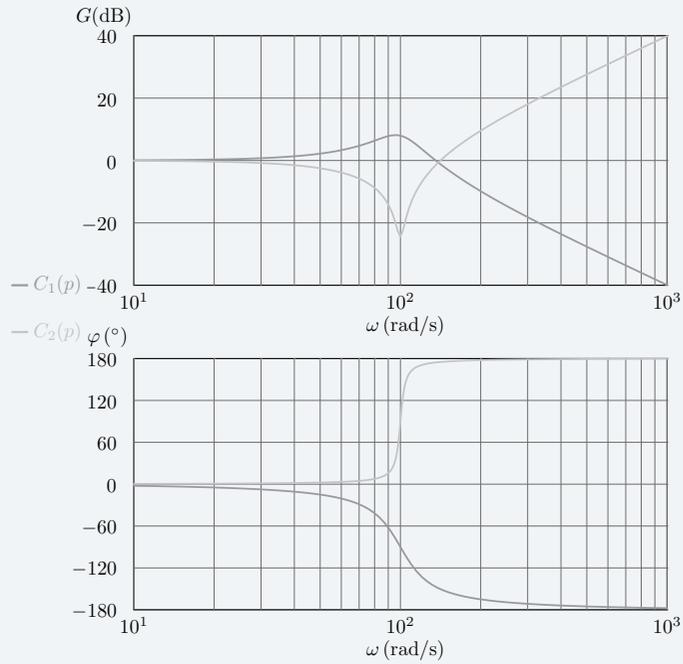


Figure 6.49 – Diagrammes de Bode

Par superposition, on trace finalement les diagrammes de Bode du filtre réjecteur sur la figure 6.50

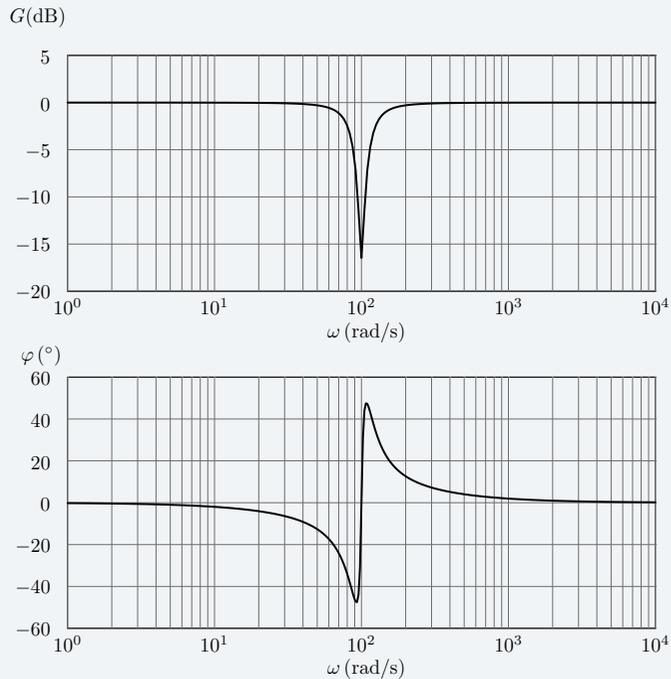


Figure 6.50 – Diagrammes de Bode

2. Ce filtre diminue sensiblement le gain localement, plus de 15 dB à la pulsation ω_2 pour l'exemple traité. Il est donc possible d'augmenter nettement la marge de gain tout en gardant un gain en basses et hautes fréquences identiques. Par contre, le déphasage introduit, ici près de -40° , peut nuire à la marge de phase.

La valeur de ξ_N permet d'ajuster le niveau de l'apport de gain et de phase.

6.18 Correction tachymétrique

1. Comme $k = 0$ on travaille sur un schéma bouclé simple, on trouve immédiatement :

$$B_O(p) = \frac{K_\theta K_C K_m r}{p(1 + \tau_m p)}$$

$$B_F(p) = \frac{K_\theta K_C K_m r}{K_\theta K_C K_m r + p(1 + \tau_m p)}$$

ou encore en notant $K_{BO} = K_\theta K_C K_m r$

$$B_F(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{BO}} + \frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2}$$

2. Pour avoir la réponse indicielle la plus rapide, comme on a un système d'ordre 2, il faut que le coefficient d'amortissement, ξ , soit égal à 0,69.

Par identification avec la forme canonique de référence d'un système d'ordre 2

$$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}} \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{BO} \tau_m}}$$

Pour minimiser le temps de réponse, il faut

$$K_C = \frac{1}{4\xi^2 \tau_m K_\theta K_m r}$$

Application numérique : $K_C \approx 92,6$.

3. À partir des expressions de ω_0 et ξ déterminées précédemment, on trouve

$$\omega_0 = \frac{1}{2\xi \tau_m}$$

Avec la valeur de K_C calculée, l'amortissement est tel que $t_{r5\%} \omega_0 \approx 3$ donc

$$t_{r5\%} \approx 6\xi \tau_m$$

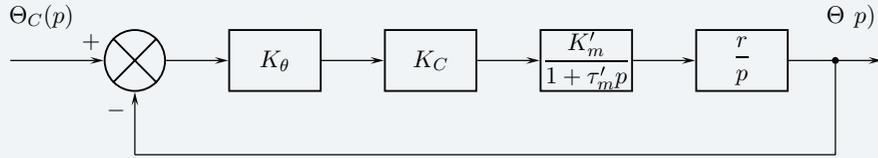
Application numérique : $t_{r5\%} \approx 0,02$ s.

Comme la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 alors l'écart en position est nul et l'écart de traînage, noté ε_V est tel que

$$\varepsilon_V = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{K_\theta K_C K_m r}$$

Application numérique : $\varepsilon_V = 9,5 \cdot 10^{-3}$ rad

4. Lorsque $k \neq 0$ pour calculer les fonctions de transfert demandées, il faut réduire la boucle interne comme sur la figure 6.51. On trouve alors



$$\text{avec : } K'_m = \frac{HK_m}{1 + HK_mkG_T} \quad \text{et} \quad \tau'_m = \frac{\tau_m}{1 + HK_mkG_T}$$

Figure 6.51 – Schéma-bloc réduit et à retour unitaire

$$T_O(p) = \frac{K_\theta K_C K'_m r}{p(1 + \tau'_m p)}$$

en notant : $K'_{BO} = K_\theta K_C K'_m r$, on a :

$$T_F(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K'_{BO}} + \frac{\tau'_m}{K'_{BO}} p^2}$$

5. Pour garder des conditions de stabilité équivalentes, il faut que le coefficient d'amortissement reste voisin de 0,69. Cela revient à régler une marge d'amplitude sur un contour voisin de 0 dB.

Par un raisonnement analogue à celui mené pour l'étude sans retour tachymétrique, le coefficient d'amortissement, ξ' du système avec retour tachymétrique s'écrit :

$$\xi' = \frac{1}{2\sqrt{K'_{BO}\tau'_m}} = \frac{1 + HK_mkG_T}{2\sqrt{K_\theta K_C HK_mkG_T \tau_m}}$$

On veut $\xi = \xi' = 0,69$ alors en remplaçant K_C par l'expression trouvée précédemment, on obtient

$$\sqrt{H} = 1 + HK_mkG_T$$

d'où l'expression de k

$$k = \frac{\sqrt{H} - 1}{HK_mG_T}$$

Avec cette expression de k , on garantit une stabilité similaire à celle obtenue sans retour tachymétrique. En effet le coefficient d'amortissement étant identique avec et sans retour tachymétrique, la marge d'amplitude est la même. Marge de phase et de gain sont également identiques puisque les fonctions de transfert $B_F(p)$ et $T_F(p)$ ont la même forme.

Comme $K'_{BO} > K_{BO}$ alors l'écart de traînage a diminué, on a donc amélioré la précision.

Par ailleurs, $\tau'_m < \tau_m$, il y a donc augmentation de la bande passante, le système est donc plus rapide. On peut aussi raisonner sur la valeur de la pulsation propre. On a montré

$$\omega_0 = \frac{1}{2\xi\tau_m}$$

donc par analogie

$$\omega'_0 = \frac{1}{2\xi'\tau'_m}$$

Comme $\xi = \xi'$ et $\tau'_m < \tau_m$ alors $\omega'_0 > \omega_0$ d'où un système plus rapide avec le retour tachymétrique.

La courbe de réponse indicielle, figure 6.52, illustre cette amélioration de rapidité.

Les diagrammes de Bode, figure 6.53, permettent de visualiser les marges de phase qui sont identiques pour les deux configurations étudiées.

À noter que les diagrammes de Black, figure 6.54, des fonctions de transfert $B_O(p)$ et $T_O(p)$ sont identiques ce qui était prévisible compte tenu des remarques formulées lors des conclusions sur l'étude de stabilité.

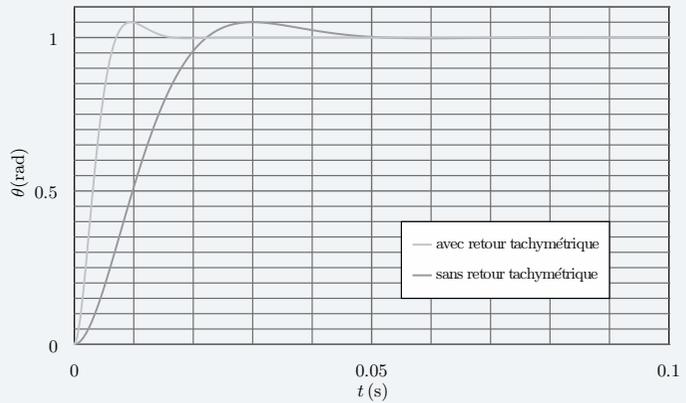


Figure 6.52 – Réponse indicielle des systèmes avec et sans retour tachymétrique

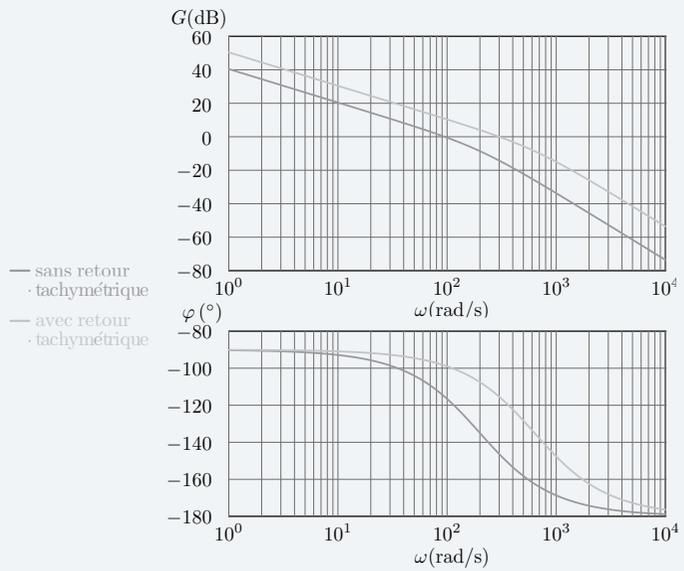


Figure 6.53 – Diagrammes de Bode

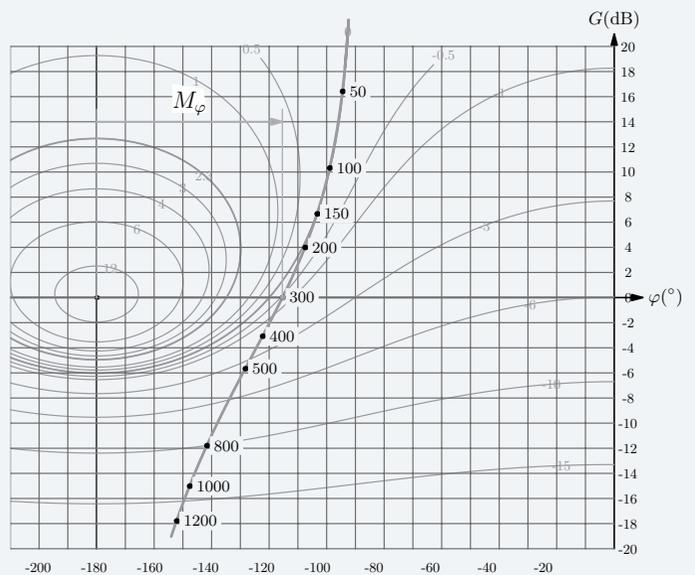


Figure 6.54 – Diagramme de Black sans les courbes isophases. Les pulsations indiquées correspondent au système avec retour tachymétrique

6. On ne peut utiliser ce type de correction que si la dérivée de la variable de sortie a une existence physique puisqu'on doit réaliser la mesure de cette grandeur.

6.19 Centrale thermique

1. Pour conclure sur la stabilité, il faut déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. À partir du schéma, on obtient :

$$H(p) = \frac{P(p)}{P_c(p)} = \frac{K_t K_s C(p)}{K_t K_s C(p) + 1 + T_t p}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} H_1(p) &= \frac{K_t K_s K_i}{K_t K_s K_i + p(1 + T_t p)} \\ H_2(p) &= \frac{K_t K_s K_{pi}(1 + T_t p)}{K_t K_s K_{pi}(1 + T_t p) + T_t p(1 + T_t p)} \\ H_3(p) &= \frac{K_t K_s K(1 + aT p)}{K_t K_s K(1 + aT p) + (1 + T p)(1 + T_t p)} \end{aligned}$$

Quel que soit le correcteur utilisé, on a des fonctions de transfert d'ordre 2 avec des coefficients de dénominateur positifs. On peut alors affirmer que tous les systèmes modélisés sont stables.

2. Pour obtenir une erreur nulle pour une entrée en échelon, il faut que les fonctions de transfert en boucle ouverte soient de classe 1.

On voit aisément que seul le correcteur à retard de phase ne permet pas d'avoir une fonction de transfert en boucle ouverte de classe 1.

3. Avec le modèle d'ordre 1 adopté pour décrire le comportement de la turbine, on trouve un temps de réponse de $3T_t$.

Avec le correcteur intégral, la fonction de transfert en boucle fermée est d'ordre 2.

Pour un système d'ordre 2, le temps de réponse le plus court est obtenu lorsque le coefficient d'amortissement vaut 0,69. Dans ce cas, on a

$$t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$$

La fonction de transfert $H_1(p)$ se met sous la forme canonique suivante

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_t K_s K_i} + \frac{T_t}{K_t K_s K_i} p^2}$$

On trouve alors par identification

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_t K_s K_i}{T_t}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_t K_s K_i T_t}}$$

On en déduit :

$$\omega_0 = \frac{1}{2\xi T_t}$$

Finalement, le temps de réponse de la boucle de régulation s'établit à

$$t_{r5\%} \approx 6 \times 0,69T_t \quad \text{soit environ} \quad t_{r5\%} \approx 4,2T_t$$

On constate donc que le temps de réponse du système régulé est supérieur à celui de la turbine non asservie.

4. Si $K_{pi} K_s K_t = 1$ alors

$$R(p) = \frac{1 + T_t p}{1 + 2T_t p + T_t T_t p^2}$$

5. À partir du schéma à retour unitaire de la figure 6.24, de la forme de $R(p)$ et $I(p)$, on peut affirmer que la fonction de transfert en boucle fermée est d'ordre 3.

Pour vérifier la stabilité, il faut montrer que les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, notée $G(p)$, sont à partie réelle strictement négative.

On recherche alors la fonction de transfert en boucle fermée puis on utilise le critère de Routh car *a priori* tous les coefficients du polynôme situé au dénominateur de $F(p)$ sont positifs.

Comme on a un schéma à retour unitaire, on écrit :

$$G(p) = \frac{F(p)}{F_c(p)} = \frac{K_r R(p) I(p)}{1 + K_r R(p) I(p)}$$

ou encore

$$G(p) = \frac{K_r(1 + T_i p)}{(1 + 2T_i p + T_i T_i p^2) I_0 p + K_r(1 + T_i p)}$$

soit en réordonnant le dénominateur

$$G(p) = \frac{K_r(1 + T_i p)}{K_r + (K_r T_i + I_0) p + 2T_i I_0 p^2 + T_i T_i I_0 p^3}$$

On établit le tableau de Routh suivant :

$$\begin{array}{cccc} p^3 & T_i T_i I_0 & K_r T_i + I_0 & 0 \\ p^2 & 2T_i I_0 & K_r & 0 \\ p^1 & A_1 & A_2 & \\ p^0 & \underbrace{B_1}_{\text{pivots}} & & \end{array}$$

où :

$$A_1 = -\frac{1}{2T_i I_0} \begin{vmatrix} T_i T_i I_0 & K_r T_i + I_0 \\ 2T_i I_0 & K_r \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(T_i K_r - 2(K_r T_i + I_0))$$

$$A_2 = 0$$

$$B_1 = K_r.$$

Comme il ne doit pas y avoir de changement de signe dans la colonne des pivots alors

$$-T_i K_r + 2(K_r T_i + I_0) > 0$$

ce qui conduit à

$$T_i > \frac{T_i K_r - 2I_0}{2K_r}$$

6. L'écart en régime permanent est défini par :

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} (f_c(t) - f(t))$$

Comme le système est stable, la limite existe, donc d'après le théorème de la valeur finale on obtient

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p (F_c(p) - F(p))$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p F_c(p) (1 - G(p))$$

L'entrée est un échelon de fréquence d'amplitude F_0 donc

$$F_c(p) = \frac{F_0}{p}$$

alors

$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} F_0(1 - G(p))$$

Comme

$$G(p) = \frac{1 + T_i p}{1 + \frac{(K_r T_i + I_0)}{K_r} p + \frac{2T_i I_0}{K_r} p^2 + \frac{T_i T_i I_0}{K_r} p^3}$$

on obtient finalement

$$e_{\infty} = 0$$

Résultat prévisible puisque la boucle ouverte est de classe 1.

7. Le système étant précis pour l'entrée de consigne, pour caractériser le comportement par rapport aux perturbations, il faut déterminer les deux fonctions de transfert $W(p)$ et $Z(p)$ telles que

$$F(p) = W(p)A_c(p) - Z(p)P_{cl}(p)$$

Recherche de $W(p)$

On suppose que la perturbation P_{cl} est nulle. On peut alors écrire

$$W(p) = \frac{F(p)}{A_c(p)} = \frac{R(p)I(p)}{1 + K_r R(p)I(p)}$$

ou encore

$$W(p) = \frac{1 + T_i p}{K_r + (K_r T_i + I_0)p + 2T_i I_0 p^2 + T_i T_i I_0 p^3}$$

Recherche de $Z(p)$

On suppose que la perturbation A_c est nulle. On peut alors écrire

$$Z(p) = \frac{F(p)}{P_{cl}(p)} = \frac{I(p)}{1 + K_r R(p)I(p)}$$

ou encore

$$Z(p) = \frac{1 + 2T_i p + T_i T_i p^2}{K_r + (K_r T_i + I_0)p + 2T_i I_0 p^2 + T_i T_i I_0 p^3}$$

Comme le système est linéaire, on a finalement

$$F(p) = \frac{(1 + T_i p) A_c(p) - (1 + 2T_i p + T_i T_i p^2) P_{cl}(p)}{K_r + (K_r T_i + I_0)p + 2T_i I_0 p^2 + T_i T_i I_0 p^3}$$

avec

$$A_c(p) = \frac{A_{c0}}{p} \quad \text{et} \quad P_{cl}(p) = \frac{P_{cl0}}{p}$$

La fréquence de sortie étant supposée finie, on peut utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer l'expression de f en régime permanent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Ce qui permet de trouver

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + T_i p) A_{c0} - (1 + 2T_i p + T_i T_i p^2) P_{cl0}}{K_r + (K_r T_i + I_0)p + 2T_i I_0 p^2 + T_i T_i I_0 p^3}$$

Soit finalement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{A_{c0} - P_{cl0}}{K_r}$$

Compte tenu des exigences imposées, on trouve

$$K_r \geq \frac{P_0}{0,04F_0}$$

8. On trace les diagrammes asymptotiques de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte

$$B(p) = \underbrace{\frac{1}{p}}_{B_1(p)} \times \underbrace{\frac{K_r}{I_0} \frac{1}{1 + 2T_i p + T_i T_t p^2}}_{B_2(p)} \times \underbrace{(1 + T_i p)}_{B_3(p)}$$

Les pulsations remarquables pour le tracé des diagrammes asymptotiques sont

$$\frac{1}{T_i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{T_i T_t}}$$

Pour ces tracés, on doit envisager deux cas de figures

$$\frac{1}{T_i} < \frac{1}{\sqrt{T_i T_t}} \quad \text{soit} \quad T_i > T_t$$

$$\frac{1}{T_i} > \frac{1}{\sqrt{T_i T_t}} \quad \text{soit} \quad T_i < T_t$$

Par ailleurs, compte tenu du résultat obtenu précédemment pour l'expression de T_i et de la valeur de K_r proposée, on a

$$T_i > 2,6 \text{ s}$$

Pour tracer les diagrammes de Bode, on procède par superposition.

Les diagrammes asymptotiques des fonctions de transfert $B_i(p)$ sont présentés figure 6.55. Pour ces tracés, on a imposé $T_i > T_t$.

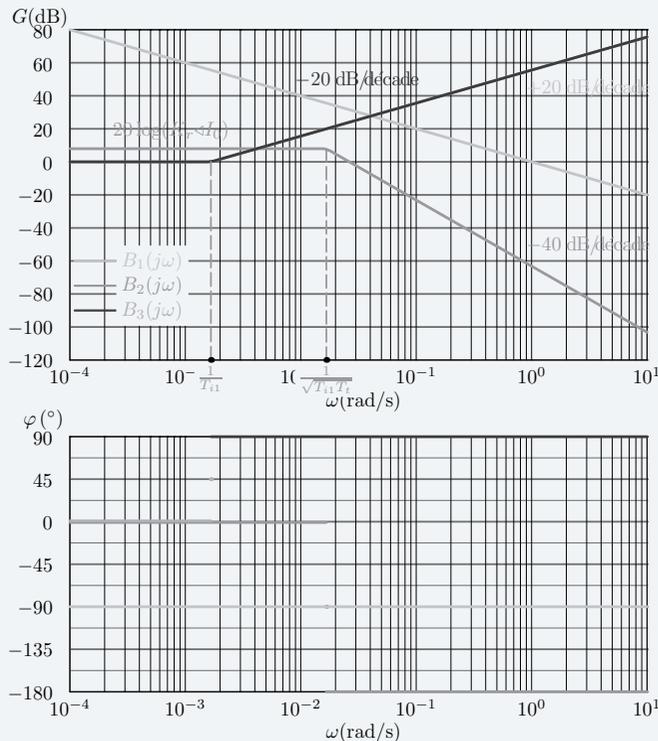


Figure 6.55 – Diagrammes asymptotiques de Bode pour $T_{i1} = T_i > T_t$

Par addition, on obtient les diagrammes asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte figure 6.56. Sur cette figure 6.56, on envisage deux cas possibles $T_{i1} = T_i > T_t$ et $T_{i2} = T_i < T_t$.

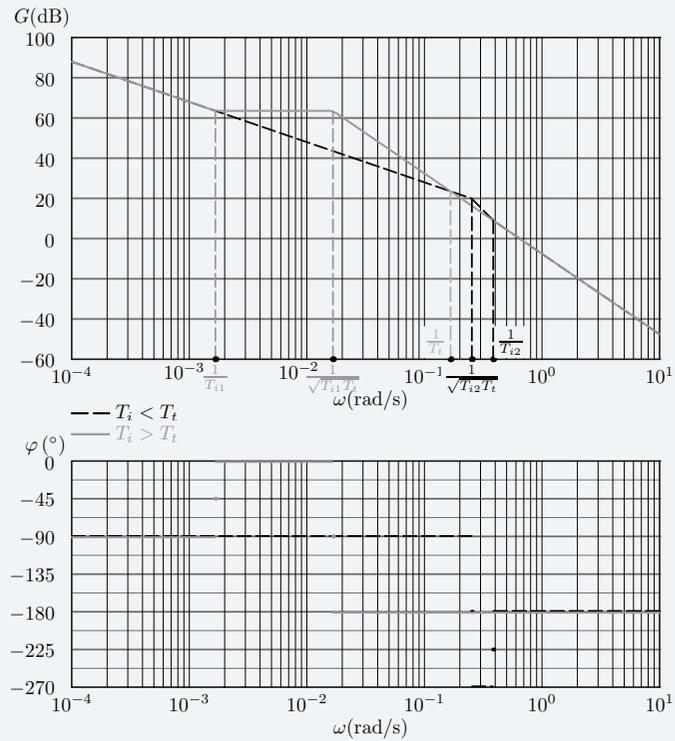


Figure 6.56 – Diagrammes asymptotiques de Bode

9. Si $T_i = T_t$ alors

$$B(p) = \frac{K_r}{I_0 p(1 + T_i p)}$$

Par définition de la marge de phase, on a

$$M_\varphi = 180 + \arg(B(j\omega_{0dB}))$$

On recherche alors la pulsation de coupure à 0 dB notée ω_{0dB} telle que

$$|B(j\omega_{0dB})| = 1$$

On a donc

$$\frac{K_r}{I_0} = \omega_{0dB} \sqrt{1 + \omega_{0dB}^2 T_i^2}$$

ou encore

$$\omega_{0dB}^4 T_i^2 + \omega_{0dB}^2 - \left(\frac{K_r}{I_0}\right)^2 = 0$$

On trouve alors

$$\omega_{0dB} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{K_r}{I_0}\right)^2 T_i^2}}{2T_i^2}}$$

Comme l'expression de la marge de phase est

$$M_\varphi = 180 + (-90 - \arctan(\omega_{0dB} T_i))$$

alors

$$M_\varphi = 90 - \arctan \left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{K_r}{T_0}\right)^2 T_i^2}}{2}} \right)$$

À partir des données fournies, on trouve

$$M_\varphi \approx 15^\circ$$

10. Compte tenu des exigences du cahier des charges, la marge de phase n'est pas suffisante.

La lecture des tracés asymptotiques de Bode permet de conclure à une valeur de T_i plus grande que celle de T_l pour assurer la marge de phase souhaitée.

11. Si $T_i = T_l$ la fonction de transfert de la régulation de puissance s'écrit

$$R(p) = \frac{1}{1 + T_i p}$$

On a alors un temps de réponse égal à $3T_i$ soit 18 secondes.

Si maintenant, on envisage $T_i > T_l$ alors

$$R(p) = \frac{1 + T_i p}{1 + 2T_i p + T_i T_i p^2}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme

$$R(p) = \frac{1 + T_i p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \quad \text{où} \quad T_1 < T_i < T_2$$

Dans cette configuration, comme la constante de temps T_2 est supérieure à 7 secondes alors le temps de réponse est supérieur à 18 secondes.

Ce que l'on peut vérifier sur la figure 6.57.

Il semble donc qu'avec les choix effectués pour les correcteurs il ne soit pas possible de satisfaire tous les critères du cahier des charges.

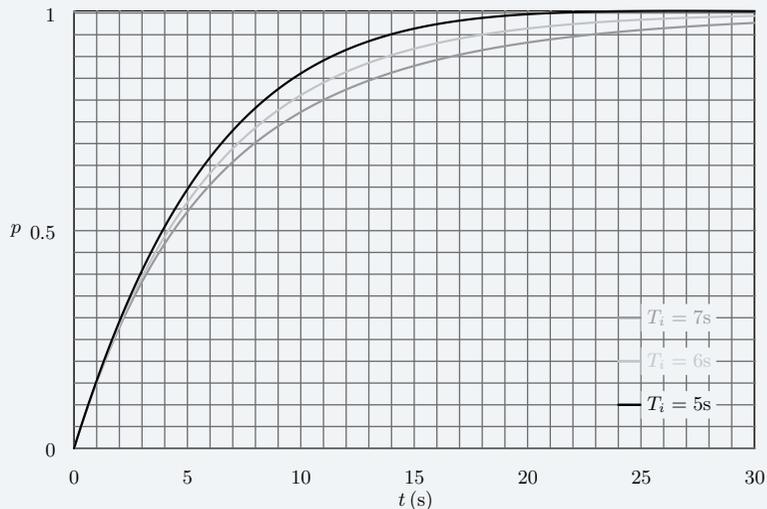


Figure 6.57 – Réponse indicielle de la boucle de puissance

6.20 Commande du plan horizontal réglable de l'Airbus A340

1. Si les deux distributeurs et si les deux moteurs sont considérés comme identiques alors il faut $K_3 = 0,5$ pour pouvoir obtenir le schéma proposé.
2. On a bien un asservissement pour la mise en position de la vis puisque les préactionneurs, ici les deux distributeurs proportionnels, sont commandés de manière autonome.
3. On vérifie la stabilité du système défini pour cela on détermine la fonction de transfert en boucle fermée

$$\frac{\Theta_v(p)}{\Theta_1(p)}$$

À partir du schéma proposé, on trouve

$$\frac{\Theta_v(p)}{\Theta_1(p)} = \frac{R_3 R_5 R_6 \lambda K_d K_h}{R_3 R_5 R_6 \lambda K_d K_h R_4 R_7 + p \left(1 + \frac{2\xi_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2} \right)}$$

Pour que le système puisse être stable, il faut que tous les coefficients du polynôme situé au dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée soient strictement positifs. Compte tenu des données de l'énoncé, il faut que K_h soit strictement positif.

4. À partir du schéma-blocs de mise en position de la vis, on trouve la fonction de transfert en boucle ouverte

$$T_h(p) = \frac{\lambda K_d K_h R_5 R_6 R_4 R_7}{p \left(1 + \frac{2\xi_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2} \right)}$$

5. La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1. Aux basses fréquences, l'asymptote du diagramme de gain a une pente de moins -20 décibels par décade et la phase asymptotique vaut -90° .

Les caractéristiques des asymptotes hautes fréquences sont fournies par l'ordre de la fonction de transfert. Ici, $T_h(p)$ est d'ordre 3, on a donc une pente de -60 décibels par décade pour l'asymptote du diagramme de gain et la phase asymptotique vaut -270° . Le diagramme asymptotique est proposé sur la figure 6.58.

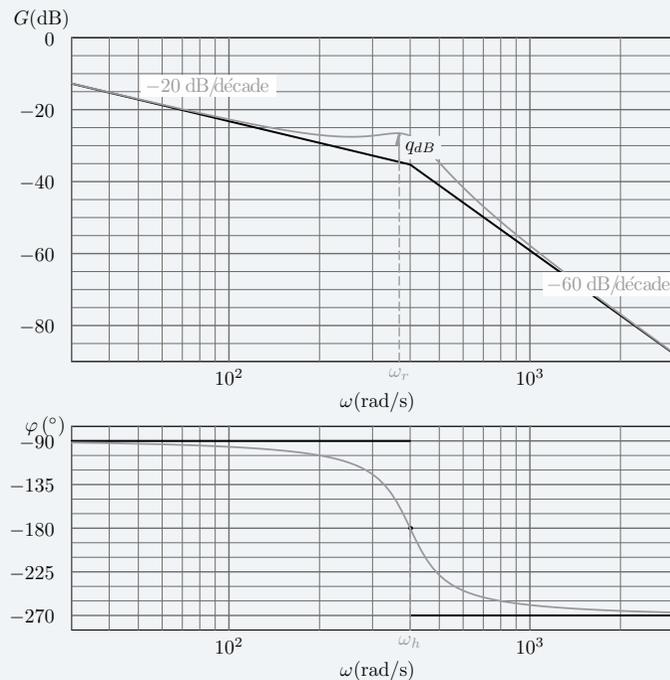


Figure 6.58 – Diagrammes de Bode

6. Afin de pouvoir tracer les diagrammes de Bode par superposition, on écrit la fonction de transfert en boucle ouverte comme produit de fonctions élémentaires, on a alors

$$T_h(p) = \frac{1}{p} \times \frac{\lambda K_d K_h R_5 R_6 R_4 R_7}{\left(1 + \frac{2\xi_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}\right)}$$

Comme on a superposition d'un intégrateur et d'un deuxième ordre alors la phase est telle que

$$\varphi(\omega_h) = -180^\circ$$

On relève alors sur le diagramme de phase

$$\omega_h = 400 \text{ rad.s}^{-1}$$

Compte tenu de l'allure de la courbe de gain pour des pulsations voisines de 400 rad.s^{-1} , on peut conclure que le deuxième ordre est résonant.

Le coefficient d'amortissement ξ_h du système du deuxième ordre est tel que

$$\xi_h < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sur le diagramme de gain, on a un pic de résonance à la pulsation

$$\omega_r = \omega_h \sqrt{1 - 2\xi_h^2}$$

La détermination de la valeur de ω_h sur l'échelle logarithmique n'étant pas très précise, on utilise la valeur de la surtension qui est définie par

$$q_{dB} = 20 \log q$$

où

$$q = \frac{|T_h(j\omega_r)|}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |T_h(j\omega)|} = \frac{1}{2\xi_h \sqrt{1 - \xi_h^2}}$$

On relève sur le diagramme de gain une surtension d'environ 8 dB. On en déduit alors le coefficient d'amortissement

$$\xi_h \approx 0,2$$

L'effet du phénomène de résonance est mis en évidence sur la figure 6.58.

Comme le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte K_{BO} est tel que

$$K_{BO} = \lambda K_d K_h R_5 R_6 R_4 R_7$$

alors pour déterminer le gain K_h , il faut trouver la valeur de K_{BO} .

Par définition du gain d'une fonction de transfert, on a

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |T_h(j\omega)| = -20 \log \omega + 20 \log K_{BO} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_h^2}\right)^2 + 4\xi_h^2 \frac{\omega^2}{\omega_h^2}}$$

On voit alors que

$$G_{dB}(\omega) \approx -20 \log \omega + 20 \log K_{BO} \quad \text{si} \quad \omega \ll \omega_h$$

Comme $\omega_h = 400 \text{ rad.s}^{-1}$, en relevant sur le diagramme de Black la valeur du gain pour une pulsation $\omega = 0,01 \text{ rad.s}^{-1}$, on obtient une bonne approximation de K_{BO} . On lit

$$20 \log |T_h(0,01j)| \approx 57 \text{ dB}$$

donc

$$20 \log K_{BO} \approx 17 \text{ dB}$$

Finalement, on trouve

$$K_h \approx \frac{10^{\frac{17}{20}}}{\lambda K_d R_5 R_6 R_4 R_7}$$

À partir des données de l'énoncé, on trouve $K_h \approx 59,5 \cdot 10^4 \text{ rad.s.m}^{-3}$

Finalement, on obtient pour le moteur hydraulique

$$M_h(p) = -\frac{59,5 \cdot 10^4}{p(1 + 0,01p + 6,25 \cdot 10^{-6}p^2)}$$

7. La marge de gain est définie par

$$M_G = -20 \log(\omega_c) \quad \text{avec} \quad \varphi(\omega_c) = -180^\circ$$

et la marge de phase vaut

$$M_\varphi = 180 + \varphi(\omega_{0dB}) \quad \text{avec} \quad G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$$

Pour trouver la marge de phase, on est obligé d'utiliser le diagramme de Black fourni. On relève sur la figure 6.59

$$M_G \approx 27 \text{ dB} \quad \text{et} \quad M_\varphi \approx 90^\circ$$

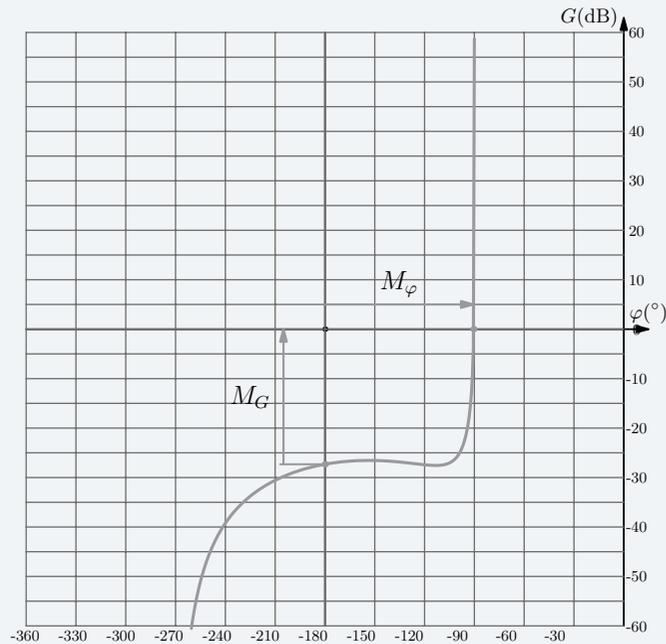


Figure 6.59 – Diagramme de Black

8. Pour $\lambda = 0,015 \text{ m.rad}^{-1}$ on a une marge de gain d'environ 27 dB. La valeur limite de cette marge est fixée à 10 dB par le cahier des charges. On peut donc remonter la courbe de gain de 17 dB.

Le minimum de marge de phase est fixé à 45° . Sur les diagrammes de Bode, lorsque la phase vaut -135° , le gain a une valeur d'environ -27 dB. Compte tenu de la définition de la marge de phase rappelée plus haut, en relevant la courbe de gain de 27 dB on respecte encore la contrainte fixée par le cahier des charges.

La valeur limite de λ est donc

$$\lambda_{Max} \approx 0,015 \times 10^{\frac{17}{20}} \quad \text{soit} \quad \lambda_{Max} \approx 0,1 \text{ m.rad}^{-1}$$

9. À partir du lieu de transfert en boucle ouverte tracé dans le plan de Black, on trouve, en utilisant les courbes isogains et isophases, les valeurs de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle fermée.

Même en prenant la valeur maximale de λ , ce qui revient à remonter le lieu de Black de 17 dB, le lieu de transfert ne coupe aucune des courbes isogains de valeur positive. Le gain maximal en boucle fermée est donc majoré par 0. Il n'y a donc pas de surtension en boucle fermée.

10. Pour obtenir une bande passante à -3 dB en boucle fermée d'au moins 5Hz il faut que le lieu de transfert coupe la courbe isogains -3 dB pour une pulsation au moins égale à 30 rad.s^{-1} . Pour obtenir cela, il faut remonter le lieu de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte d'environ 12 dB par rapport à celui fourni avec $\lambda = 0,015 \text{ m.rad}^{-1}$, voir figure 6.60.

On obtient alors comme valeur minimale de λ

$$\lambda_{\text{mini}} \approx 0,015 \times 10^{\frac{12}{20}} \quad \text{soit} \quad \lambda_{\text{mini}} \approx 0,06 \text{ m.rad}^{-1}$$

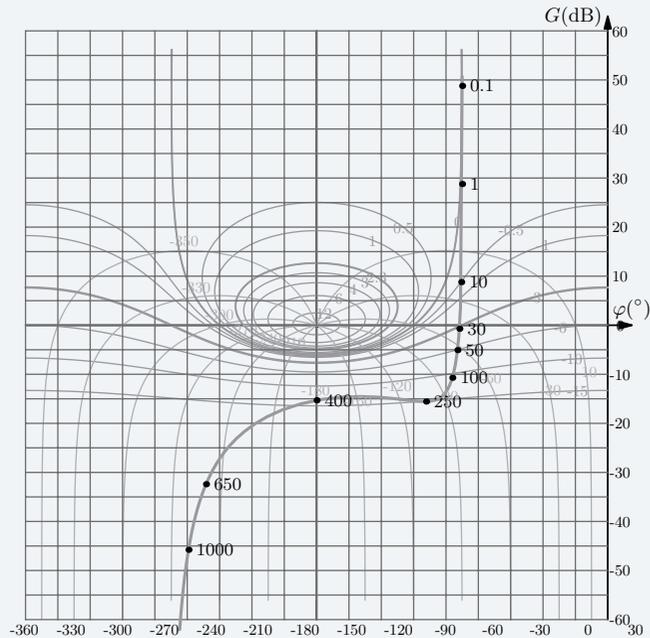


Figure 6.60 – Diagramme de Black avec $\lambda = 0,06 \text{ m.rad}^{-1}$

11. Le critère relatif à la stabilité est vérifié si la valeur de λ est inférieure à $0,1 \text{ m.rad}^{-1}$. Pour la rapidité, λ doit être au moins égal à $0,06 \text{ m.rad}^{-1}$. Enfin comme la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 alors l'écart en régime permanent pour une entrée en échelon est nul.

En conclusion, si $\lambda \in [0,06; 0,1]$ le cahier des charges est respecté pour la mise en position de la vis.

12. On suppose les conditions initiales nulles. On écrit les 4 équations de fonctionnement du moteur dans le domaine de Laplace

$$U(p) = E(p) + RI(p)$$

$$E(p) = K_v \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_c I(p)$$

$$Jp\Omega_m(p) = C_m(p)$$

Pour trouver la fonction de transfert du moteur, on peut tracer le schéma-blocs, voir figure 6.61, à partir des quatre équations écrites dans le domaine de Laplace ou raisonner directement sur ces équations et trouver $M(p)$ par substitution.

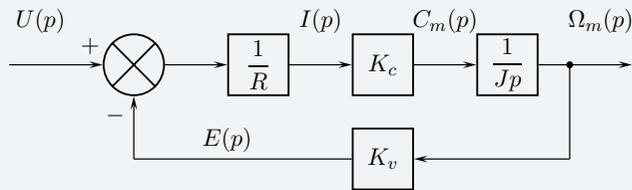


Figure 6.61 – Schéma-bloc du moteur

La fonction de transfert du moteur à courant continu s'écrit alors

$$M(p) = \frac{K_c}{K_c K_v + R J p}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\omega_m(t) = \frac{d}{dt} \theta_m(t)$$

On trouve donc :

$$I(p) = \frac{1}{p}$$

13. On déduit de la réponse précédente

$$T(p) = \frac{K_1 K_c C_1}{p(K_c K_v + R J p)}$$

Pour déterminer K_{BO} , on écrit $T(p)$ sous forme canonique

$$T(p) = \frac{K_1 C_1}{K_v} \frac{1}{p \left(1 + \frac{R J}{K_c K_v} p \right)}$$

On obtient alors

$$K_{BO} = \frac{K_1 C_1}{K_v}$$

14. Le schéma à retour unitaire est proposé figure 6.62

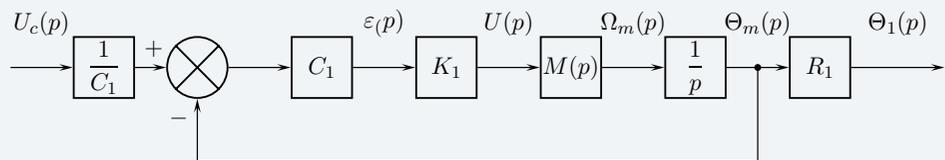


Figure 6.62 – Schéma-bloc à retour unitaire de l'asservissement de position du moteur

15. Comme le schéma est à retour unitaire, on écrit

$$G(p) = \frac{R_1}{C_1} \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

ou encore

$$G(p) = \frac{R_1}{C_1} \frac{K_{BO}}{K_{BO} + p \left(1 + \frac{R J}{K_c K_v} p \right)}$$

Mis sous forme canonique, on obtient

$$G(p) = \frac{R_1}{C_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}}p + \frac{RJ}{K_c K_v K_{BO}}p^2}$$

16. On souhaite une réponse indicielle sans dépassement. On veut donc un système du second ordre apériodique critique dont le coefficient d'amortissement ξ vaut 1.

Par identification de l'expression de $G(p)$ à la forme de référence d'un système du second ordre

$$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_v K_{BO}}{RJ}}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_c K_v}{RJ K_{BO}}}$$

On veut un coefficient d'amortissement ξ égal à 1 alors

$$K_{BO} = \frac{K_c K_v}{4RJ} \quad \text{soit} \quad K_{BO} = 25$$

17. Critère de rapidité : $t_{r5\%} < 0,2$ s.

Par lecture de l'abaque fourni dans l'énoncé, on trouve que $t_{r5\%}\omega_0 \approx 5$ lorsque le coefficient d'amortissement vaut 1.

On obtient alors l'expression suivante pour le temps de réponse à 5 %

$$t_{r5\%} \approx \frac{5}{\sqrt{\frac{K_c K_v K_{BO}}{RJ}}}$$

Avec le gain de boucle calculé précédemment, on obtient un temps de réponse de 0,05 secondes. Résultat tout à fait conforme au cahier des charges.

Critère de précision : écart de position nul en régime permanent

La fonction de transfert en boucle ouverte étant de classe 1, l'écart est donc nul en régime permanent pour une entrée en échelon.

18. Comme la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 alors l'écart ε_v en régime permanent pour une entrée en rampe unitaire est

$$\varepsilon_v = \frac{1}{K_{BO}}$$

Avec la valeur maximale de K_{BO} calculée pour valider le critère de stabilité, on obtient

$$\varepsilon_v = 0,04 \text{ V}$$

Tous les contraintes imposées par le cahier des charges ne peuvent donc pas être respectées avec un correcteur proportionnel.

19. Le cahier des charges impose

$$\varepsilon_v \leq 0,02 \text{ V}$$

Pour respecter cette contrainte, on doit avoir

$$K_{BO} \geq 50$$

20. Les contraintes de précision sont vérifiées quel que soit le correcteur choisi si $K_{BO} \geq 50$.

On fixe le gain de boucle avec les correcteurs à avance et retard de phase à 50. On note ce gain K_{BOc} . Le gain K_{BOc} est donc le double de celui choisi pour tracer les lieux de Black donnés dans l'énoncé.

Le lieu de transfert corrigé est donc relevé d'environ 6 dB par rapport à celui de l'énoncé, figure 6.63. En effet, en doublant le gain de boucle on augmente le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte de $20 \log 2$.

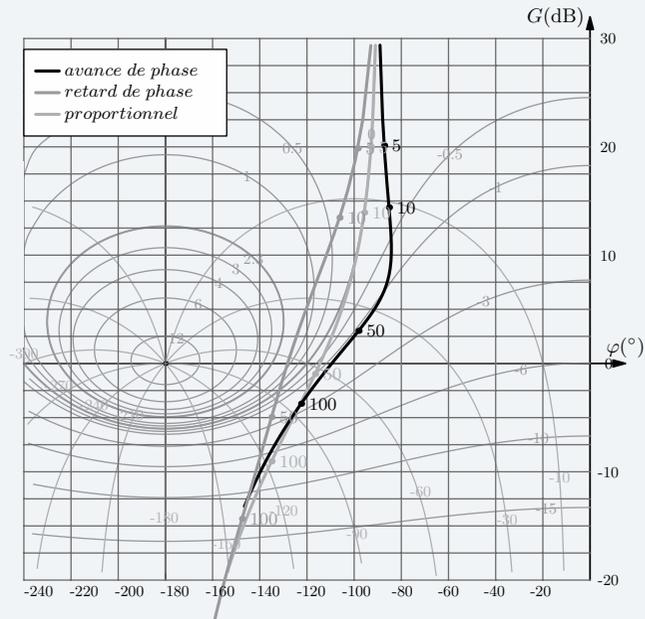


Figure 6.63 – Diagramme de Black avec $K_{BO} = 50$

La bande passante à -3 dB en boucle fermée est bien plus grande pour le correcteur à avance de phase que pour le correcteur à retard de phase. Pour la rapidité, le correcteur à avance de phase semble donc préférable.

D'un point de vue stabilité, avec le correcteur à retard de phase et un gain de boucle fixé à 50 on observe une surtension d'au moins 1 dB en boucle fermée alors qu'avec le correcteur à avance de phase il n'y a pas de surtension en boucle fermée. On peut là aussi donner un avantage au correcteur à avance de phase.

En conclusion, pour pouvoir respecter tous les critères imposés par le cahier des charges, on choisit d'installer un correcteur à avance de phase. Choix confirmé par les courbes de la figure 6.64

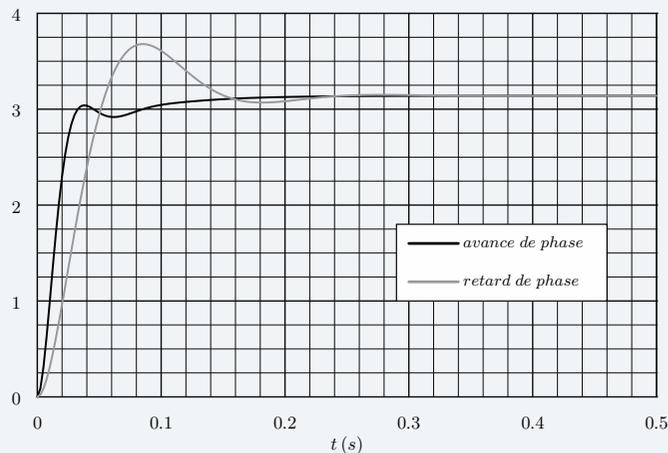


Figure 6.64 – Réponse indicielle avec $K_{BO} = 50$

Plan

Les méthodes à retenir	273
Énoncés des exercices	274
Du mal à démarrer ?	279
Corrigés	280

Thèmes abordés dans les exercices

- coder et décoder
- dénombrer des combinaisons
- exprimer une fonction logique
- décrire des événements dans un ordre chronologique
- décrire le comportement séquentiel d'un système

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- variables et fonctions logiques
- table de vérité
- tableau de Karnaugh
- chronogramme
- caractère monostable ou bistable
- modèle de description GRAFCET

Les méthodes à retenir

Pour déterminer une fonction logique

- Dénombrer des combinaisons.
- Exprimer une forme canonique.
- Simplifier l'expression d'une fonction logique.

➔ Exercices 7.1, 7.2

Pour élaborer un GRAFCET

- Lister la ou les successions d'ordres à donner.
- Rechercher les événements permettant la prise de décision
 - « Je donne un ordre jusqu'à ce que... »
- Évaluer les dépassements de durées pour changer de décision
 - « Si je n'ai pas tel événement au bout de... »

➔ Exercices 7.1

Énoncés des exercices

7.1 Code postal

La société La Poste utilise un code « 3 parmi 5 » pour faciliter le tri automatique du courrier, et l'information codée sur les lettres est le code postal composé de cinq chiffres décimaux.

La table de codage des dix chiffres décimaux par des mots binaires de cinq bits est définie sur la figure

	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
2	0	1	1	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	0
7	1	1	0	0	1
8	1	1	0	1	0
9	1	1	1	0	0

Figure 7.1 – Table de codage des dix chiffres décimaux

Ce code est utilisé sur les lettres sous forme d'un code barre, chaque état « 1 » étant défini par une barre. Sont ajoutées une barre de début et une barre de séparateur entre chaque chiffre, ce qui donne sur une lettre :

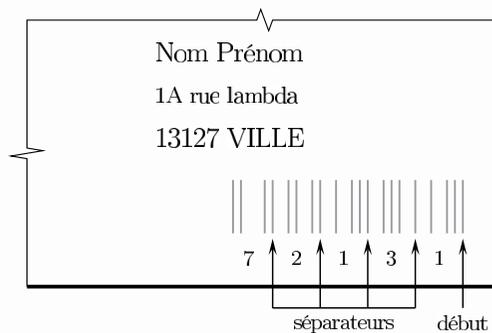


Figure 7.2 – Un code postal imprimé sur une enveloppe

1. Combien y a-t-il de barres sur un tel code barre ?
2. À quelle(s) condition(s) une inscription sur une lettre appartient-elle au code ?
3. Justifier l'intérêt d'un code trois parmi cinq pour coder des chiffres décimaux.
4. Dessiner le code barre correspondant au code postal des Éditions Dunod :

75240 PARIS CEDEX 05

5. Le traitement automatique de ce code suppose de transcoder chaque chiffre en un nombre binaire naturel : soit $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ ce nombre. Calculer la valeur de n puis déterminer par une méthode de votre choix la fonction $b_2 = f(p_4, p_3, p_2, p_1, p_0)$

7.2 Gestion d'un sas

Présentation

On s'intéresse à la gestion d'un sas installé entre deux bâtiments sur le passage de chariots. Ce sas, schématisé sur la figure 7.3 ci-dessous, comporte deux portes $P1$ et $P2$ ne devant pas être ouvertes simultanément :

- ces deux portes sont manœuvrées respectivement par deux vérins pneumatiques à double effet $V1$ et $V2$;
- les vérins sont pilotés par des distributeurs électropneumatiques 4/2 ;
- les positions ouverte et fermée des portes sont données par des détecteurs électromécaniques à contact ;
- pour leur traversée du sas, les chariots s'accrochent à une chaîne entraînée par un moteur électrique M à commande monostable ;
- un dispositif non décrit empêche la présence d'un nouveau chariot avant l'évacuation complète du précédent.

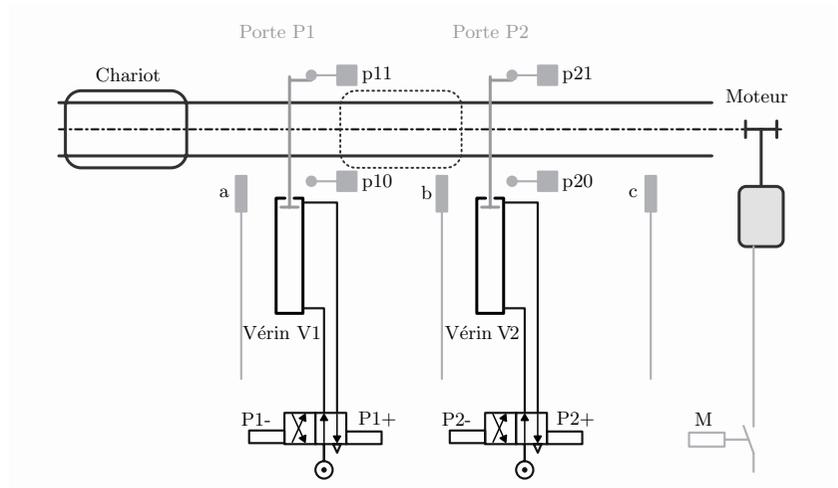


Figure 7.3 – Schéma du sas étudié

Les mnémoniques associés aux entrées et aux sorties du point de vue *Partie Commande* sont listés dans le tableau de la figure 7.4.

Entrées		Sorties	
a	détecteurs de proximité,	M	Marche du moteur
b	images des positions		
c	du chariot		
$p10$	porte $P1$ ouverte	$P1-$	Ouverture de la porte $P1$
$p11$	porte $P1$ fermée	$P1+$	Fermeture de la porte $P1$
$p20$	porte $P2$ ouverte	$P2-$	Ouverture de la porte $P2$
$p21$	porte $P2$ fermée	$P2+$	Fermeture de la porte $P2$
Variables internes			
m	image de l'état du moteur		

Figure 7.4 – Inventaire des entrées et des sorties du point de vue PC

Description du fonctionnement souhaité

À la mise en marche de l'installation :

- le moteur M tourne ;
- les deux portes $P1$ et $P2$ sont fermées.

Événements provoquant une évolution de la situation :

- un chariot est détecté par le capteur a
→ arrêter le moteur M et ouvrir la porte $P1$.
- la porte $P1$ est ouverte
→ mettre le moteur en marche.
- le chariot arrive devant le capteur b
→ arrêter le moteur M et fermer la porte $P1$.
- la porte $P1$ est fermée
→ ouvrir la porte $P2$.
- la porte $P2$ est ouverte
→ mettre le moteur en marche.
- le chariot arrive en c
→ fermer la porte $P2$.

Commande directe du sas

Le déroulement d'un cycle est proposé par le chronogramme de la figure 7.5

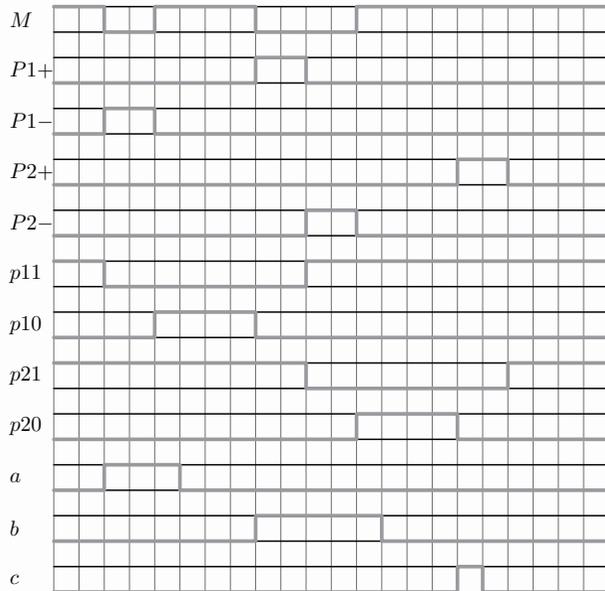


Figure 7.5 – Chronogramme du déroulement d'un cycle

1. On considère l'unité de temps, notée UT , représentée par une graduation en abscisse. Évaluer la durée d'ouverture ou de fermeture d'une porte. Évaluer la durée de passage d'un chariot devant un des détecteurs de proximité a, b ou c , sans tenir compte de la durée pendant laquelle un chariot est arrêté.
2. Justifier les trois équations proposées :

$$P1- = a.\bar{m}$$

$$P1+ = b.p1\bar{1}$$

$$P2- = b.p11.\bar{m}$$

On propose de plus l'équation suivante :

$$P2+ = c$$

Modifier le chronogramme en conséquence et conclure quant à la validité de cette équation.

3. Pour un observateur externe au système, les quatre événements suivants sont simultanés

$$M : 1 \rightarrow 0$$

$$P1- : 0 \rightarrow 1$$

$$p11 : 1 \rightarrow 0$$

$$a : 0 \rightarrow 1$$

Du point de vue interne au système, définir la chronologie entre ces quatre événements.

Expliquer alors pourquoi l'équation $P2- = p11.\bar{m}$ ne convient pas.

En vue de proposer une équation pour la commande M , on propose figure 7.6 un tableau de Karnaugh reprenant l'ensemble des sept entrées.

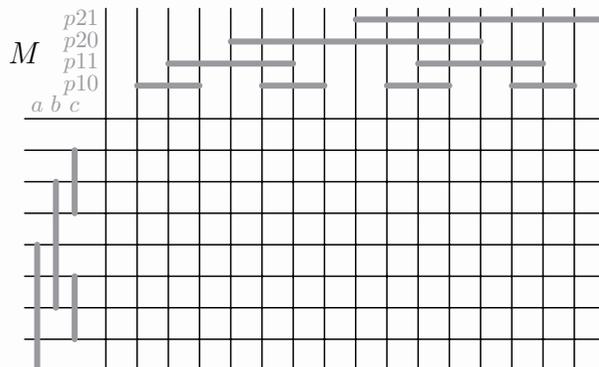


Figure 7.6 – Tableau de Karnaugh pour la commande du moteur M

4. Griser les lignes et les colonnes de ce tableau correspondant à des combinaisons *a priori* impossibles.

5. En identifiant les différentes combinaisons proposées par le chronogramme, remplir les cases concernées du tableau de Karnaugh définissant la sortie M .

Proposer une équation pour la commande M .

Commande par automate

Pour pouvoir gérer les modes de marche et d'arrêt, on désire réaliser la commande de l'installation à l'aide d'un automate programmable industriel.

Il est décidé d'installer un pupitre comportant :

- un bouton poussoir à accrochage *ARU* (Arrêt d'urgence) ;
- un bouton tournant bistable *manu/auto* (manuel/automatique) ;
- un bouton tournant monostable à trois positions et rappel au centre *arrêt/.../marche* ;

- un bouton poussoir *réarmement* ;
- un voyant vert *VV* et un voyant rouge *VR*.

Pour la suite du problème, on ne s'intéresse pas à la conception de la partie commande en mode manuel.

En mode automatique, les conditions initiales autorisant le fonctionnement sont :

- les deux portes *P1* et *P2* sont fermées ;
- il n'y a pas de chariot au niveau du sas, information donnée par les capteurs *a*, *b* et *c*.

Lorsque l'on passe en mode *auto*, le moteur ne doit pas se mettre en marche avant la demande *marche*. Lorsque *arrêt* est demandé, deux cas sont possibles :

- le moteur *M* est en marche et on est en attente d'un chariot ;
 - fin de cycle immédiate.
- un chariot est en train de traverser le sas.
 - le voyant vert clignote et l'arrêt est effectif à la fin du cycle.

6. Compléter le graphe GMMA (Graphe de Mode de Marche et d'Arrêt) et proposer un graphe nommé GMN (Graphe de Marche Normal) de manière à obtenir le fonctionnement souhaité.

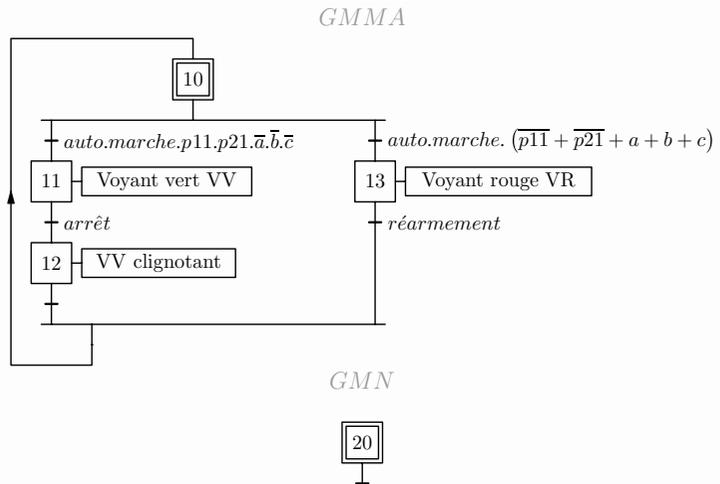


Figure 7.7 – Les graphes GMMA et GMN à compléter

7. Proposer un graphe nommé GAU (GRAF CET d'Arrêt d'Urgence) permettant la gestion suivante :

- un appui sur le bouton *ARU* provoque la désactivation des graphes GMN et GMMA ;
- le cycle de traitement d'arrêt d'urgence ne peut se terminer que si le système est à nouveau dans sa configuration initiale, cette remise en état de référence pouvant être demandée par un appui sur le bouton réarmement.

GAU



Figure 7.8 – Le graphe GAU à compléter

Du mal à démarrer ?

7.1 2. Les n barres distribuées aléatoirement matérialisent-elles un code barre ?

3. Que vaut « trois parmi cinq » ?

5. Remplir les tables de vérité en correspondance, puis utiliser un tableau de Karnaugh.

7.2 1. La réponse est à exprimer en unités de temps (UT).

2. Teinter les différentes combinaisons sur le chronogramme.

4. Une porte peut-elle être à la fois ouverte et fermée ? Combien de chariots traversent simultanément le sas ?

5. Repérer la chronologie des cases visitées.

Corrigés des exercices

7.1 Code postal

1. Chacun des cinq chiffres d'un code postal comporte une barre de début et trois barres de codage. Un tel code comporte alors exactement vingt barres.

$$N = 20 \text{ barres}$$

2. On peut proposer plusieurs conditions :

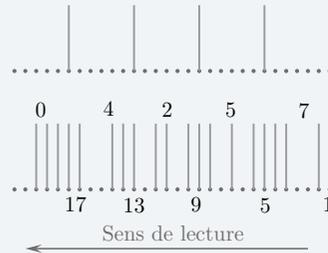
- le code comporte 20 barres ;
- les barres 1, 5, 9, 13 et 17 sont équidistantes ;
- comme une barre de démarrage est ajoutée à chacun des cinq chiffres du code postal :
 - on a toujours au moins deux barres consécutives par chiffre ;
 - on peut donc déterminer la distance d entre deux barres consécutives ;
 - la longueur de chaque mot est de $5d$, la distance entre deux barres de début consécutives est de $6d$ et la distance entre les deux barres extrêmes du code barre est comprise entre $27d$ et $29d$.

3. On calcule « trois parmi cinq »

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

Ce code autorise dix combinaisons et permet de définir les dix chiffres décimaux. Réciproquement, chacune des combinaisons possibles s'interprète comme un chiffre.

4. Le code 75240 se dessine à partir d'une grille de longueur $29d$ sur laquelle sont placées les cinq barres de début de chiffre



5. Pour coder dix chiffres en code binaire, il est nécessaire d'avoir un mot de 4 bits

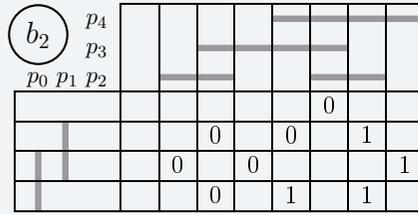
$$n = 3$$

Pour poursuivre il est nécessaire de mettre en parallèle les deux codages

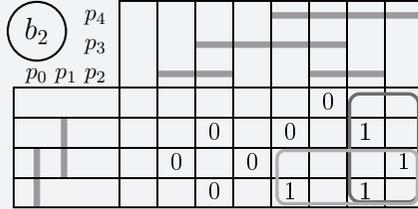
b_3	b_2	b_1	b_0		p_4	p_3	p_2	p_1	p_0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	2	0	1	1	0	1
0	0	1	1	3	0	1	1	1	0
0	1	0	0	4	1	0	0	1	1
0	1	0	1	5	1	0	1	0	1
0	1	1	0	6	1	0	1	1	0
0	1	1	1	7	1	1	0	0	1
1	0	0	0	8	1	1	0	1	0
1	0	0	1	9	1	1	1	0	0

On peut alors remplir un tableau de Karnaugh avec les données extraites ci-dessus.

Avec cinq variables, 32 combinaisons sont possibles, mais seules les 10 cases avec trois « 1 » et deux « 0 » sont concernées.



Deux regroupements sont possibles pour proposer une expression donnant la valeur de la variable b_2



On propose alors

$$b_2 = p_0 \cdot p_4 + \overline{p_3} \cdot p_4$$

7.2 Gestion d'un sas

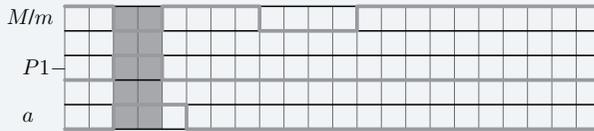
1. L'évaluation du temps d'ouverture d'une porte se fait en cherchant l'écart entre l'ordre P_{i+} et le compte rendu p_{i1} , ou entre l'ordre P_{i-} et le compte rendu p_{i0} .

On trouve $2 UT$ pour cette durée.

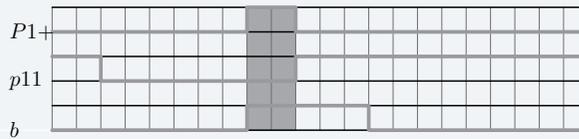
Le chariot passe sans s'arrêter devant le seul capteur c . La durée de passage est donc d'une seule UT .

2. On reprend les lignes concernées du chronogramme pour évaluer les équations proposées :

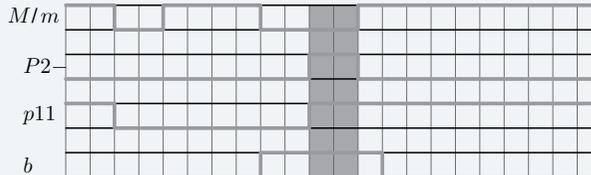
$$P_{1-} = a \cdot \overline{m}$$



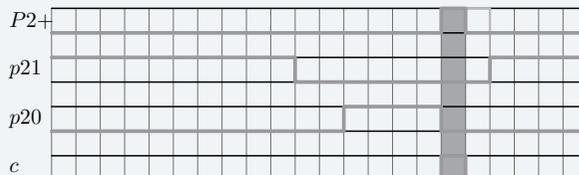
$$P_{1+} = b \cdot \overline{p_{11}}$$



$$P_{2-} = b \cdot p_{11} \cdot \overline{m}$$



$$P_{2+} = c$$



Seule la ligne concernant la commande $P2+$ est à modifier. Comme le distributeur associé au vérin $V2$ est un distributeur bistable, une durée UT de commande est suffisante pour le faire basculer et la commande convient. Il est à constater que cela n'accélère pas la fermeture de la porte...

3. Les quatre événements cités ne sont pas simultanés ; les reprendre dans l'ordre chronologique permet de les ordonner :

- le chariot arrive devant le capteur a ;

$$a : 0 \rightarrow 1$$

- cet événement entraîne l'arrêt du moteur et l'ouverture de la porte ;

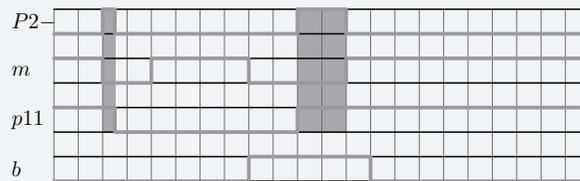
$$M : 1 \rightarrow 0$$

$$P1- : 0 \rightarrow 1$$

- il faut que la porte commence à se fermer pour que la capteur « porte $P1$ ouverte » passe à l'état FAUX.

$$p11 : 1 \rightarrow 0$$

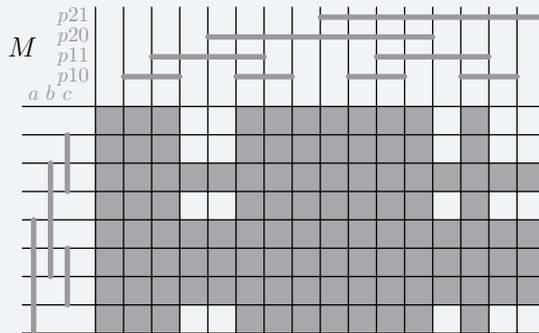
On reprend le chronogramme en exagérant la chronologie précédente pour se rendre compte pourquoi l'équation $P2- = p11.\bar{m}$ ne peut pas convenir.



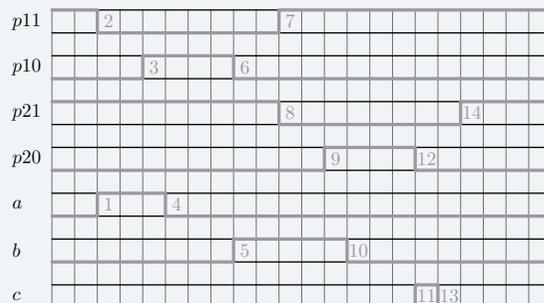
À l'arrivée d'un chariot en a , les deux portes $P1$ et $P2$ s'ouvrent alors en même temps !

4. Plusieurs arguments sont à avancer :

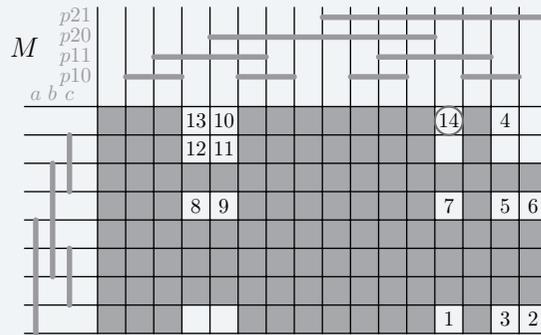
- d'un point de vue structurel, une porte ne peut pas être à la fois ouverte et fermée : les deux combinaisons $p10.p11$ et $p20.p21$ sont ainsi impossibles ;
- d'un point de vue fonctionnel :
 - pour que le sas remplisse son rôle, une des deux portes est nécessairement fermée à chaque instant ;
 - il n'y a qu'un seul chariot à la fois, donc à chaque instant, un seul des détecteurs a, b et c peut être à l'état VRAI.



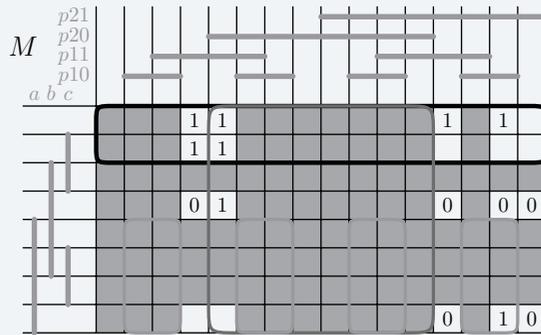
5. Sur le chronogramme, on repère 14 événements que l'on peut identifier dans l'ordre chronologique, à partir de l'état initial caractérisé par $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.p11.\bar{p10}.p21.p20$



Ces événements correspondent à 14 cases blanches du tableau de KARNAUGH, que l'on repère ci-dessous. L'événement 14 correspond au retour à l'état initial, et on entoure cette case, point de départ du parcours.



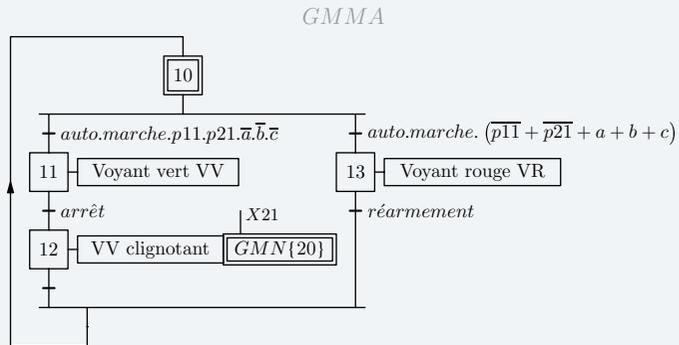
Pour chacune de ces cases, on inscrit la valeur que doit avoir la fonction M pour la combinaison concernée.

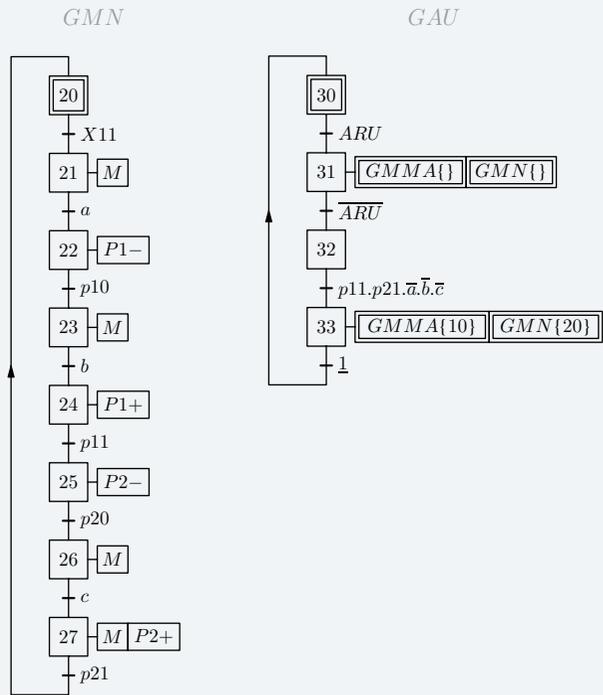


Trois regroupements sont possibles, tracés ci-dessus, et on propose ainsi comme équation pour M

$$M = \bar{a}.\bar{b} + p20 + a.p10$$

6. Le graphe GMN présente une seule séquence





7. Lors d'un appui sur le bouton *ARU*, il est demandé de désactiver les deux graphes GMMA et GMN. Il faut libérer *ARU* et revenir aux conditions initiales pour réactiver les deux graphes de production.